

КАЛИНИНГРАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

В.А. Гриценко,
Е.В. Белосевич, Е.К. Артищева

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ
МЕТОДЫ В ГЕОГРАФИИ

Учебное пособие

Калининград
1999

УДК 557.55

В.А. Гриценко, Е.В. Белосевич, Е.К. Артищева. Математические методы в географии: Учебное пособие / Калинингр. ун-т. – Калининград, 1999. – 75 с. – ISBN 5-88874-151-5.

Предлагаемое учебное пособие посвящено краткому разбору теории интерполирования, численного интегрирования, методов решения дифференциальных уравнений и систем. Даны основные понятия гармонического анализа и сетевого планирования, а также предложены подробные рекомендации по решению основных численных задач с помощью профессиональных программных пакетов.

Пособие предназначено для студентов естественнонаучных специальностей, прежде всего географов, использующих численные методы при обработке результатов эксперимента, а также специалистов, использующих в своей работе теорию и практику численных методов.

Пособие подготовлено при поддержке Федеральной целевой программы «Интеграция», проект «Балтийский учебно-научный центр по экологии и геоэкологии». Научный руководитель проекта - проф. Е.М. Емельянов.

Таблиц - 5, библиография - 39 назв.; иллюстраций - 15.

Печатается по решению редакционно-издательского Совета Калининградского государственного университета.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	5
.....	
5	
Глава 1. Приближение функций	9
1. Функции одной переменной	9
.....	
1.1. Понятие функции одной переменной	9
.....	
1.2. Способы задания функции одной переменной	10
.....	
2. Интерполирование функций	11
.....	
2.1. Постановка задачи интерполяции	11
.....	
2.2. Линейная интерполяция	13
.....	
2.3. Квадратичная интерполяция	15
.....	
Лабораторная работа №1	16
.....	
Лабораторная работа №2	18
.....	
3. Аппроксимация функций	21
.....	
3.1. Постановка задачи аппроксимации функции одной переменной	21
.....	
3.2. Метод наименьших квадратов	24
.....	

3.3. Нахождение приближающей функции в виде основных элементарных функций	26
.....	
Лабораторная работа №3	32
.....	
4. Множественная линейная регрессия	35
.....	
4.1. Понятие функции нескольких переменных	35
.....	
4.2. Постановка задачи множественной линейной регрессии	35
.....	
Глава 2. Численное интегрирование	37
1. Методы численного интегрирования	37
.....	
1.1. Метод прямоугольников	37
.....	
1.2. Метод трапеций	40
.....	
1.3. Метод парабол	42
.....	
Лабораторная работа №4	43
.....	
Глава 3. Дифференциальные уравнения	45
1. Постановка задачи Коши	45
.....	
2. Методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений	46
.....	
3. Метод Эйлера	47
.....	
4. Метод Рунге-Кутты	48
.....	
5. Численное интегрирование систем обыкновенных дифференциальных уравнений	49
.....	
Лабораторная работа №5	51
.....	
Лабораторная работа №6	54

.....	
Глава 4. Практический гармонический анализ	56
1. Постановка задачи гармонического анализа	56
.....	
2. Разложение функций в ряд Фурье	57
.....	
Лабораторная работа №7	59
.....	
Глава 5. Сетевое планирование	62
1. Элементы и правила построения сетевых графиков	62
.....	
2. Понятие пути сетевого графика	65
.....	
3. Временные параметры сетевых графиков	65
.....	
4. Некоторые замечания об оптимизации плана	71
.....	
Заключение	72
Рекомендуемая литература	73

ВВЕДЕНИЕ

Проникновение математических методов в самые разнообразные, подчас неожиданные сферы человеческой деятельности означает возможность пользоваться новыми, как правило, весьма эффективными средствами исследования. Рост математической культуры специалистов в соответствующих областях приводит к тому, что изучение общих теоретических положений и методов вычислений уже не встречает серьезных трудностей. Вместе с тем на практике оказывается, что одних лишь обычных математических познаний недостаточно для решения той или иной прикладной задачи – оказывается необходимо еще иметь навыки в переводе исходной формулировки конкретной предметной задачи на математический язык. Собственно, в этом и состоит проблема овладения использованием математических методов в любой отрасли знаний или искусством математического моделирования.

К сожалению, традиционный вузовский курс математики приучает большинство студентов к несколько формальному подходу к изучаемому предмету. Он преподается по хорошо разработанной программе, подчеркивающей основные принципы математики и необходимость строго анализа. Однако все это составляет лишь часть арсенала средств, необходимых специалисту в практической деятельности. В результате при непосредственном контакте с исходным материалом у молодых специалистов зачастую возникает некоторая растерянность перед конкретными задачами.

Одним из возможных вариантов решения данной проблемы стало введение в учебный план студентов географического факультета специальной дисциплины, главной целью которой стало обучение студентов основным методам постановки задач, возникающих при обработке и анализе экспериментального материала из разнообразных практических задач. Общее название курса – «Математические методы в географии», хотя, очевидно, его можно было бы назвать и введением в методы математического моделирования. Цель данного пособия – систематически изложить наиболее важные элементы использования возможностей математики при решении задач, возникающих при географических исследованиях.

Известно, что основной посылкой использования математических методов в естественнонаучных исследованиях является потребность в улучшении понимания реально существующих и происходящих природных процессов. На практике исходным пунктом является некоторая эмпирическая ситуация, выдвигающая перед исследователем задачу, на которую необходимо найти ответ. Однако, использование на этом этапе терминов «задача» и «ответ» не совсем правомерно. В самом деле, реальные ситуации редко бывают четко очерченными, а сложное взаимодействие с окружающей средой часто делает точное описание ситуации затруднительным. Процесс выделения реального содержания задачи, уже поддающейся математическому анализу, часто бывает весьма продолжительным и требует владения многими навыками, не имеющими никакого отношения к математике (например, беседы с очевидцами события, наблюдателями, знакомство с общей ситуацией в данном районе исследований, знание особенностей техники регистрации натурального эксперимента и возможных механизмов появления погрешностей в натуральных данных, обстоятельное изучение литературы по широкому кругу вопросов и т.д.).

Часто параллельно с этой стадией постановки задачи идет процесс выявления основных или существенных особенностей исследуемого явления. В частности, для физических явлений этот процесс схематизации, или идеализации, играет решающую роль, поскольку в реальном явлении соучаствует множество процессов, и оно достаточно сложно. Некоторые черты явления представляются более важными, многие другие – несущественными. Рассмотрим, например, движение маятника, образованного тяжелым грузом, подвешенным на конце нити. В этой ситуации существенным является регулярный характер колебаний маятника, а несущественным обстоятельством – материал, из которого сделаны нить и сам груз. После того как существенные факторы выявлены, следующий шаг состоит в переводе этих факторов на язык математических понятий и величин и постулировании соотношений между этими объектами. Как правило, это одна из самых трудных стадий процесса математизации задачи, причем здесь невозможно дать никаких общих рекомендаций. И здесь исследователю приходится каждый раз решать новую, оригинальную задачу, полагаясь на весь свой опыт и возможности, полученные в предыдущей работе.

После выполнения математической постановки задачи или построения исходной математической модели ее следует подвергнуть проверке. Адекватность модели в значительной степени подвергается проверке на каждом этапе хода постановки задачи. Уравнения или другие математические соотношения, сформулированные в модели, постоянно соотносятся с реальной ситуацией.

Существует несколько аспектов проверки адекватности. Во-первых, сама математическая основа модели (которая, собственно, и составляет ее суть) должна быть непротиворечивой и подчиняться всем математическим законам. Во-вторых, справедливость математического подхода, или модели, зависит от ее способности адекватно описывать исходную ситуацию. Разумеется, подход или модель должны отражать наиболее важные стороны действительной ситуации, но они не являются действительностью. Механический маятник вполне реальный объект, его модель также часто называют математическим маятником. Однако модель – это всего лишь математическая идеализация реального объекта и ничего больше.

Математическое решение, или модель, представляет собой упрощение реальной ситуации. Ощутимое упрощение наступает тогда, когда несущественные особенности ситуации отбрасываются, а исходная сложная задача сводится к идеализированной задаче, поддающейся математическому анализу. Именно при таком подходе в классической прикладной математике возникли блоки без трения, невесомые и нерастяжимые нити, невязкие жидкости и многие другие понятия подобного рода. Эти понятия не существуют в реальной действительности, они являются абстракциями, составной частью идеализации, предпринятой создателями при построении модели.

Все перечисленное относится только к одной из сторон процесса упрощения исследуемой реальной ситуации. Другая сторона связана уже собственно с математической техникой. Дело в том, что системы уравнений, которые в итоге получаются при постановке задач, очень часто не поддаются точному решению. Такая ситуация, например, существует в механике жидкости, где на базе уравнений Навье-Стокса сравнительно легко пишутся исходные уравнения подхода. Однако подавляющая часть этих систем не имеет аналитического решения и поэтому для продвижения в описании основных свойств приходится делать дополнительные упрощения. Цель по-прежнему та же – получение выводов и предсказаний о свойствах реальной системы.

Описанный образ действий при использовании возможностей математики, или построения моделей, не является единственным, и этому не стоит удивляться. При другом возможном подходе первым шагом может стать построение простейшей модели минимально возможного числа наиболее важных характерных особенностей явления. Это, как правило, делается для того, чтобы «почувствовать» рассматриваемую задачу, причем делается еще до того, как сама задача окончательно сформулирована. Затем эта простейшая модель обобщается, чтобы охватить и дополнительные факторы, пока не будет найдено некоторое приемлемое решение.

Еще одно обстоятельство связано с природой рассматриваемых математических переменных, необходимых для описания основных факторов задачи. Они делятся на два класса: в один входят величины, поддающиеся (по крайней мере теоретически) точному измерению и управлению; они называются детерминированными переменными. В другой класс входят величины, которые никогда не могут быть точно измерены и имеют случайный характер; они называются стохастическими переменными. Для эффективной реализации подхода, или модели, чрезвычайно важно, чтобы природа переменных была правильно установлена.

Наконец, даже после получения долгожданных формул, решений или иных по форме представлений результатов работа исследователя не заканчивается. Наступает этап интерпретации полученных решений, который заключается в обратном переходе с математического языка на язык формулировки исходной задачи. На этом этапе необходимо осознание как математического смысла полученных решений, так и того, что они описывают на языке реального мира, который математика призвана описывать. Обычно этот этап не всегда отмечается в классическом математическом курсе высшей школы. При успехе можно говорить о продвижении в понимании исследуемой ситуации или процесса. Однако поведение решений, подхода или модели может оказаться недостаточно богатым по сравнению с исходной точкой исследования, и тогда весь процесс повторяется снова. Модель обычно начинается с самого простого и постепенно развивается, принимая все более сложные очертания по мере того, как достигается все более глубокое понимание явления.

И, наконец, последнее. Простым чтением или пассивным прохождением учебного курса «Математические методы в географии» нельзя, к сожалению, научиться эффективно использовать математику на службе собственных исследований. Реальными навыками использования математических методов, или математического моделирования, можно овладеть только в результате собственной практики исследований. Данное пособие предназначено в первую очередь начинающим исследователям и может служить переходным мостиком между учебным материалом и процессом живого научного исследования.

Глава 1. ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ

Изучение разнообразных явлений в окружающем нас мире приводит к понятию функции. Например, ясно, что каждому моменту времени в данной местности соответствует определенная температура воздуха; атмосферное давление изменяется в зависимости от высоты местности; продуктивность водоема зависит от продолжительности солнечного освещения, морские приливы и отливы периодически повторяются в зависимости от фазы Луны и т.д. Во всех этих случаях значению одной величины (время, высота над уровнем моря, продолжительность солнечного освещения, положение Луны относительно Земли) ставится в соответствие определенное значение другой величины по определенному закону. Используя математический аппарат, можно исследовать природные закономерности, проводить прогнозирование событий, анализировать прошедшие и т.д. Для этого необходимо владеть приемами перевода языка природы на язык математики. И одной из первых задач исследователя при обработке экспериментальных данных является задача нахождения имеющейся функциональной зависимости между измеренными величинами. Об этом и пойдет речь в настоящей главе.

1. Функции одной переменной

1.1. Понятие функции одной переменной

Рассмотрим два числовых множества X и Y . Правило f , по которому каждому числу $x \in X$ ставится в соответствие единственное число $y \in Y$, называется *числовой функцией*, заданной на множестве X и принимающей значения во множестве Y .

Таким образом, задать функцию, значит задать три объекта:

- 1) множество X (область определения функции);
- 2) множество Y (область значений функции);
- 3) правило соответствия f (сама функция).

Например, поставим в соответствие каждому числу его куб. Математически это можно записать формулой $y=x^3$. В этом случае правило f есть

возведение числа x в третью степень. В общем случае, если каждому x по правилу f соответствует единственный y , пишут $y = f(x)$. Здесь x называют *независимой переменной*, или *аргументом*, а y – *зависимой переменной* (т.к. выражение типа x^3 само по себе не имеет определенного числового значения, пока не указано значение x), или *функцией* от x . О величинах x и y говорят, что они связаны функциональной зависимостью. Зная все значения x и правило f , можно найти все значения y . Например, если $x=2$, то функция $f(x) = x^3$ принимает значение $y = f(2) = 2^3 = 8$.

1.2. Способы задания функции одной переменной

Существует несколько способов задания функции.

Аналитический способ. Функция f задается в виде формулы $y=f(x)$. Например, $y=3\cos(x)+2x^2$. Этот способ является преобладающим в математических исследованиях и подробно рассматривается в классическом курсе математики. В географических исследованиях соответствие между переменными величинами x и y не всегда удается записать в виде формулы. Во многих случаях формула бывает неизвестна. Тогда для выражения функциональной зависимости используются другие способы.

Графический способ. На метеорологических станциях можно наблюдать работу приборов-самописцев, регистрирующих величины атмосферного давления, температуры воздуха, его влажности в любой момент времени суток. По полученному графику можно определить значения указанных величин в любой момент времени. Графиком функции $y=f(x)$ называется множество всех точек плоскости с координатами $(x, f(x))$. График содержит всю информацию о функции. Имея перед собой график, мы как бы «видим» функцию.

Табличный способ. Этот способ является наиболее простым. В одной строке таблицы записываются все значения аргумента (числа), а в другой – значения $f(x)$, соответствующие каждому x . Например, зависимость температуры воздуха (T) от времени суток (t) в определенный день можно представить таблицей.

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
T, °C	12	11	10	9	8	7	8	10	12	14	16	17

Несмотря на повсеместное внедрение компьютеров, большинство функций, с которыми приходится сталкиваться специалисту-географу в повседневной деятельности, до сих пор представлено в виде табличного или графического задания. Табличные зависимости получают в ре-

зультате регистрации результатов опытов, лабораторных анализов, периодических замеров атмосферных или иных физических параметров. К сожалению, по таблице можно найти лишь те значения функции, значения аргумента которых имеются в таблице. В то же время часто возникают задачи, требующие нахождения значения функции для значения аргумента, не входящего в таблицу. Кроме того, этот способ не дает достаточно наглядного представления о характере изменения функции с изменением независимого переменного. От этого недостатка свободны графики, полученные в результате работы автоматических приборов, но и графическое задание не всегда может быть достаточным для дальнейших исследований. Например, такая функция иногда должна в целях исследования протекания природного процесса подвергаться каким-либо математическим операциям, в том числе дифференцированию или интегрированию. Таким образом, во многих случаях важно знать аналитическое задание функции. Так как точного аналитического задания функции, полученной в результате экспериментальной работы, не существует, то для целей исследования применяют следующий прием: функцию, заданную таблично (функцию, заданную графически, всегда можно представить в табличном виде), заменяют на некотором отрезке $[a;b]$ другой функцией – более простой, близкой в некотором смысле к данной и имеющей аналитическое выражение. Существует два основных приема такой замены – интерполирование и аппроксимация функции-таблицы.

2. Интерполирование функций

2.1. Постановка задачи интерполяции

Пусть известные значения некоторой функции f образуют следующую таблицу:

x	x_0	x_1	...	x_n
$f(x)$	y_0	y_1	...	y_n

При этом требуется получить значение функции f для такого значения аргумента x , которое входит в отрезок $[x_0;x_n]$, но не совпадает ни с одним из значений x_i ($i=0, 1, \dots, n$).

Классический подход к решению задачи построения приближающей функции основывается на требовании строгого совпадения значений $f(x)$ и $F(x)$ в точках x_i ($i=0, 1, 2, \dots, n$), т.е.

$$F(x_0)=y_0, F(x_1)=y_1, \dots, F(x_n)=y_n. \quad (1)$$

В этом случае нахождение приближенной функции называют *интерполяцией* (или *интерполированием*), а точки x_0, x_1, \dots, x_n — *узлами интерполяции*. Геометрически это означает, что нужно найти кривую $y=F(x)$ некоторого определенного типа, проходящую через заданную систему точек $M_i(x_i, y_i)$ ($i=0, 1, 2, \dots, n$) (рис. 1). В случае, если $x \notin [x_0, x_n]$, нахождение искомого функции называют *экстраполяцией*. В дальнейшем под термином «интерполяция» будем понимать как первую, так и вторую операции.

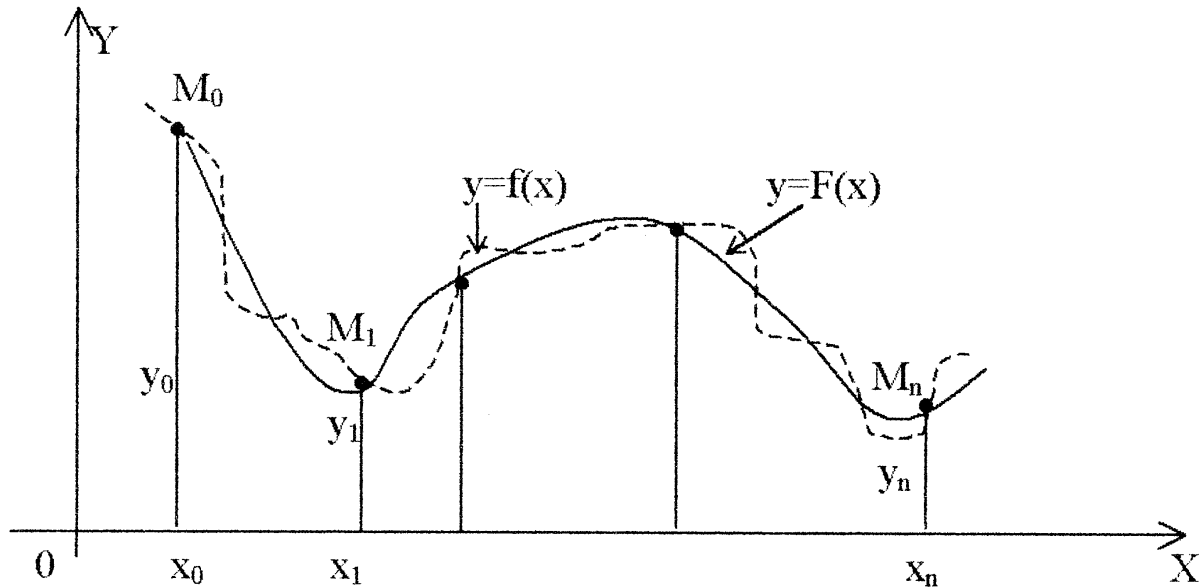


Рис. 1

Задача интерполирования может иметь в общей постановке бесчисленное множество решений или совсем их не иметь. Однако эта задача становится однозначной, если вместо произвольной функции $F(x)$ искать некоторую функцию конкретного вида, удовлетворяющую условиям (1).

Наиболее удобной в практическом использовании функцией является алгебраический многочлен степени n :

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n.$$

Чтобы задать многочлен n -й степени, достаточно задать его $n+1$ коэффициент. Значения многочлена просто вычисляются, его легко продифференцировать, проинтегрировать и т.д. Поэтому алгебраические многочлены нашли широкое применение для приближения функций.

Ниже будут подробно изложены широко используемые в географических исследованиях случаи интерполяции линейной функцией (линейная интерполяция) и квадратичной функцией (квадратичная интерполяция).

Подробно с методами интерполяции функции полиномами можно ознакомиться в [13].

2.2. Линейная интерполяция

Итак, пусть мы имеем функцию, заданную таблично. Решая задачу интерполяции, найдем в таблице два соседних значения аргумента (обозначим их x_k и x_{k+1}), между которыми лежит заданное значение x ($x_k < x < x_{k+1}$), пусть $y_k = f(x_k)$ и $y_{k+1} = f(x_{k+1})$ – соответствующие им значения функции. Будем считать, что в промежутке (x_k, x_{k+1}) данную функцию с достаточной степенью точности можно заменить линейной функцией, т.е. дугу графика функции можно заменить стягивающей ее хордой (рис.2). Такая замена называется линейной интерполяцией.

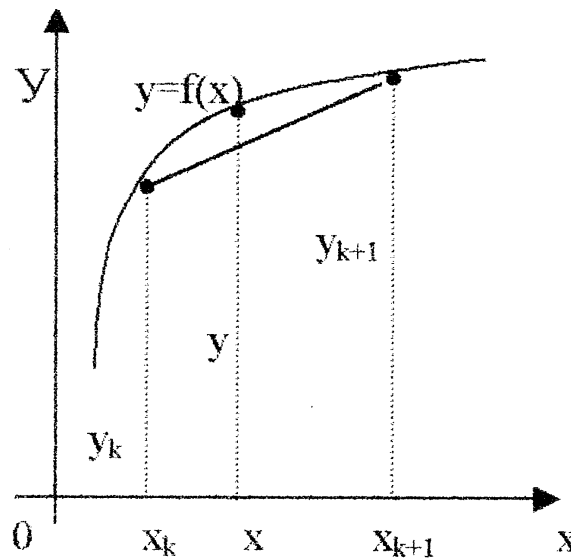


Рис. 2

Уравнение прямой, проходящей через точки (x_k, y_k) и (x_{k+1}, y_{k+1}) , имеет следующий вид:

$$\frac{y - y_k}{y_{k+1} - y_k} = \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}$$

или в более привычной форме уравнения с угловым коэффициентом:

$$y = y_k + \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k} (x - x_k) .$$

Применение линейной интерполяции для приближенного вычисления значений функции обосновано в том случае, когда возникающая при этом погрешность невелика. Для нахождения погрешности обозначим разность

между не известным нам точным значением функции $f(x)$ и ее приближенным значением, определяемым формулой (1) через $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) \equiv f(x) - y_k - \Delta y_k \frac{x - x_k}{h}.$$

Будем предполагать также, что вторая производная функции $f(x)$ на рассматриваемом участке непрерывна и удовлетворяет неравенству

$$|f''(x)| \leq M_2,$$

где $M_2 = \max_{x \in [a, b]} |f''(x)|$.

Используя аппарат математического анализа, можно доказать [27], что для любого x из интервала (x_k, x_{k+1}) оценка погрешности линейной интерполяции будет иметь следующий вид:

$$\varphi(x) \leq \frac{M_2 h^2}{8}.$$

Заметим, что вторая производная функции $f(x)$ имеет конкретный механический смысл. Если $f(x)$ описывает закон движения материальной точки, то вторая производная этой функции задает ускорение этой точки в момент времени x . Факт существования ограничения на ускорение (ограниченность второй производной) с физической точки зрения означает, что процесс описываемый функцией $f(x)$, протекает относительно равномерно и функция изменяется не очень быстро. Таковой, например, будет функция, задающая изменение суточной температуры воздуха от времени. На практике именно этим критерием «плавности» скорости изменения процесса вполне можно воспользоваться для ответа на вопрос об обоснованности применения линейной интерполяции.

Окончательно линейная интерполяция считается применимой, если вносимая ею дополнительная погрешность заметно меньше погрешности измерений натуральных данных. Если обозначить через m номер последнего разряда приводимых в таблице значений функции, то погрешность измерений будет равна $0,5 \cdot 10^{-m}$ и условие применимости линейной интерполяции запишется в виде неравенства:

$$M_2 h^2 < 4 \cdot 10^{-m}. \quad (2)$$

Шаг и точность таблицы обычно стараются согласовать так, чтобы условие (2) было выполнено.

Бывает, однако, что для выполнения этого условия требуется выбирать слишком малый шаг. В таком случае не считаются с этим условием, а для

отыскания промежуточных значений функции пользуются более сложной квадратичной интерполяцией или другими приемами [17].

2.3. Квадратичная интерполяция

Пусть снова дана функция $f(x)$, заданная таблично. Считая, что на промежутке (x_k, x_{k+2}) данную функцию с достаточной степенью точности можно заменить квадратичной функцией, то есть часть графика функции можно заменить параболой (см. рис. 3), необходимо найти значение функции $f(x)$ в некоторой точке x , принадлежащей интервалу (x_k, x_{k+2}) .

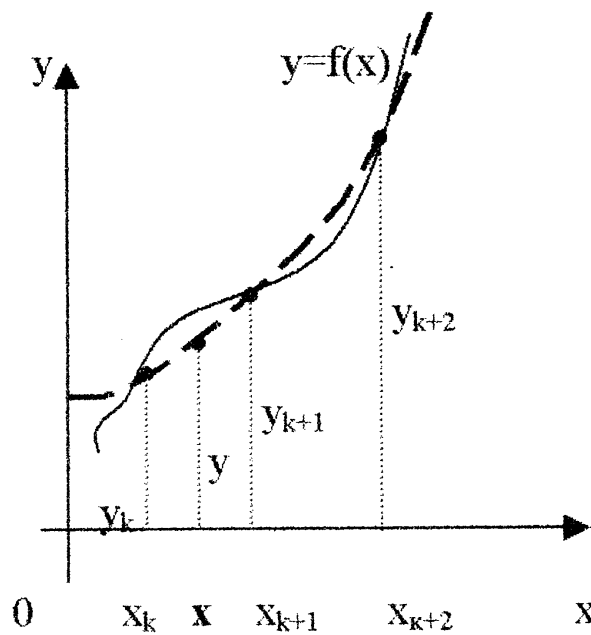


Рис. 3

Будем искать квадратичную функцию в следующем виде: $y = ax^2 + bx + c$

Исходя из условия совпадения значений искомой квадратичной функции с табличными значениями функции в трех заданных точках, составим следующую систему уравнений:

$$y_0 = a(x_0)^2 + bx_0 + c$$

$$y_1 = a(x_1)^2 + bx_1 + c$$

$$y_2 = a(x_2)^2 + bx_2 + c$$

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$h := 0.7$ шаг изменения аргумента

$i := 0..n$

$x_i := a + i \cdot h$ значения аргумента

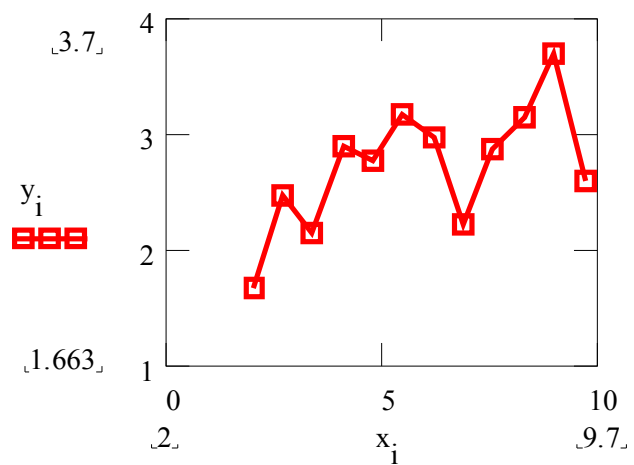
$y_i := \ln(x_i) + \text{rnd}(2)$ значения функции

таблицы значений x и y

	0
x =	2
1	2.7
2	3.4
3	4.1
4	4.8
5	5.5
6	6.2
7	6.9
8	7.6
9	8.3
10	9
11	9.7

	0
y =	1.663
1	2.481
2	2.14
3	2.9
4	2.767
5	3.175
6	2.969
7	2.235
8	2.878
9	3.15
10	3.7
11	2.61

графическое представление заданной функции:



В случае экспериментальных данных, когда необходимо обработать уже готовую таблицу, значения X и Y следует вводить с клавиатуры в виде векторов (см. решение задачи с помощью встроенных функций *MathCad*)

$xx := 6.35$ данное значение аргумента

$ix := 6$ номер табличного значения аргумента, ближайшего к данному

Найдем угловой коэффициент прямой, проходящей через 2 точки, ближайшие к xx .

$j := ix - 1..ix + 1$

$$k := \frac{y_{ix+1} - y_{ix}}{x_{ix+1} - x_{ix}}$$

$i := 0..n$

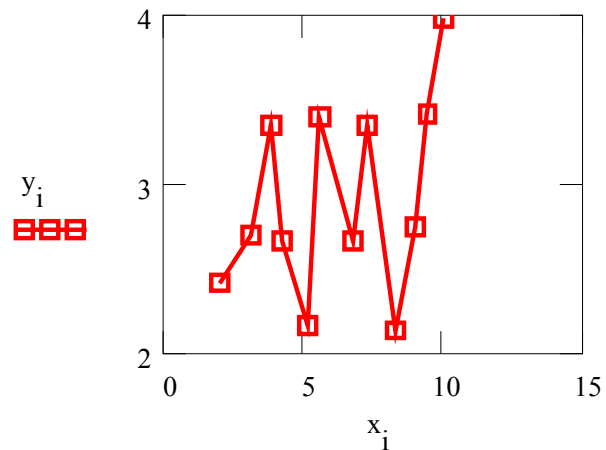
$x_i := a + i \cdot h + \text{rnd}(0.8)$ *значения аргумента*

$y_i := \ln(x_i) + \text{rnd}(2)$ *значения функции*

таблицы значений x и y

	0		0
	2.007		2.421
1	3.125	1	2.699
2	3.881	2	3.35
3	4.233	3	2.666
4	5.161	4	2.173
$x =$ 5	5.546	$y =$ 5	3.393
6	6.827	6	2.673
7	7.316	7	3.344
8	8.301	8	2.134
9	9.065	9	2.756
10	9.431	10	3.42
11	10.07	11	3.985

графическое представление заданной функции



$xx := 7.575$

данное значение аргумента

$ix := 7$

номер табличного значения аргумента, ближайшего к данному

Через 3 точки, ближайшие к xx (x_7, x_8, x_9) проведем параболу $y(x) = ax^2 + bx + c$, коэффициенты которой найдем по формуле:

$$abc := \begin{bmatrix} (x_{ix})^2 & x_{ix} & 1 \\ (x_{ix+1})^2 & x_{ix+1} & 1 \\ (x_{ix+2})^2 & x_{ix+2} & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} y_{ix} \\ y_{ix+1} \\ y_{ix+2} \end{bmatrix}$$

$$abc = \begin{bmatrix} 1.168 \\ -19.477 \\ 83.295 \end{bmatrix}$$

$f(t) := abc_0 \cdot t^2 + abc_1 \cdot t + abc_2$

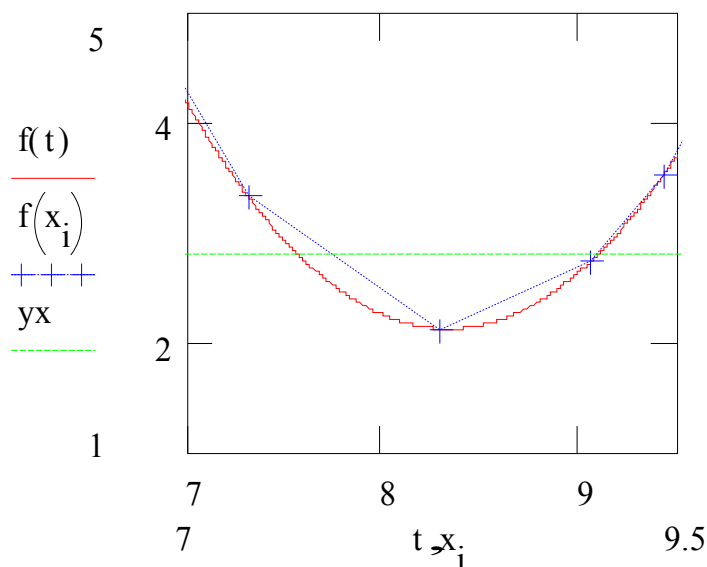
Уравнение искомой параболы

$yx := f(xx)$

в найденное уравнение подставим значение xx аргумента

$yx = 2.806$

Проиллюстрируем решение графически



В пакете MathCad имеются встроенные функции, которые позволяют быстрее решить задачу квадратичной интерполяции. На рисунке 5 предлагается решение данной задачи.

3. Аппроксимация функций

3.1. Постановка задачи аппроксимации функции одной переменной

Пусть в результате измерений в процессе опыта получено табличное задание некоторой функции $f(x)$, выражающей связь между двумя географическими параметрами:

x	x_1	x_2	\dots	x_n	(1)
$f(x)$	y_1	y_2	\dots	y_n	

Конечно, можно найти формулу, выражающую эту зависимость аналитически, применив метод интерполяции. Однако совпадение значений полученного аналитического задания функции в узлах интерполяции с имеющимися эмпирическими данными часто может вовсе не означать совпадение характеров поведения исходной и интерполирующей функции на всем интервале наблюдения. Кроме того, табличная зависимость географических показателей всегда получается в результате измерений различными приборами, имеющими определенную и не всегда достаточно малую погрешность измерения. Требование точного совпадения значений приближающей и приближаемой функций в узлах является тем более неоправдан-

ным, если значения функции $f(x)$, полученные в результате измерений, уже сами являются приближенными.

Задача аппроксимации функции одной переменной с самого начала обязательно учитывает характер поведения исходной функции на всем интервале наблюдений. Формулировка задачи выглядит следующим образом. Функция $y = f(x)$ задана таблицей (1). Необходимо найти функцию заданного вида:

$$y = F(x), \quad (2)$$

которая в точках x_1, x_2, \dots, x_n принимает значения, как можно более близкие к табличным y_1, y_2, \dots, y_n .

На практике вид приближающей функции чаще всего определяют путем сравнения вида приближенно построенного графика функции $y = f(x)$ с графиками известных исследователю функций, заданных аналитически (чаще всего простых по виду элементарных функций). А именно: по таблице (1) строится точечный график $f(x)$, затем проводится плавная кривая, по возможности наилучшим образом отражающая характер расположения точек. По полученной таким образом кривой на качественном уровне устанавливается вид приближающей функции.

Рассмотрим рисунок 6:

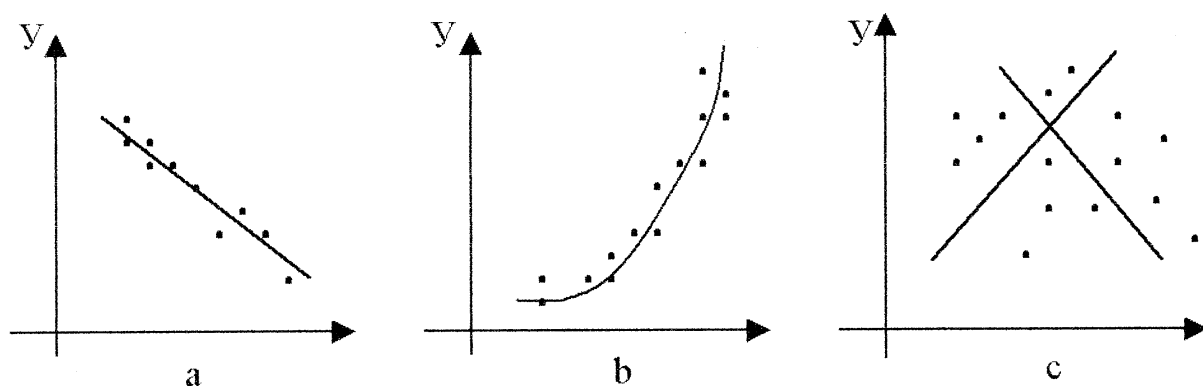


Рис. 6

На рисунке 6 изображены три ситуации:

- На графике *a* взаимосвязь x и y близка к линейной; прямая линия здесь близка к точкам наблюдений, и последние отклоняются от нее лишь в результате сравнительно небольших случайных воздействий.

- На графике *b* реальная взаимосвязь величин x и y описывается нелинейной функцией, и какую бы мы ни провели прямую линию, отклонение точек наблюдения от нее будет существенным и неслучайным. В то же

время проведенная ветка параболы достаточно хорошо отражает характер зависимости между величинами.

- На графике c явная взаимосвязь между переменными x и y отсутствует; какую бы мы ни выбрали формулу связи, результаты ее параметризации будут здесь неудачными. В частности, обе выбранные прямые одинаково плохи для того, чтобы делать выводы об ожидаемых значениях переменной y по значениям переменной x .

Следует заметить, что строгая функциональная зависимость для таблицы исходных данных наблюдается редко, ибо каждая из участвующих в ней величин может зависеть от многих случайных факторов. Однако формула (2) (ее называют эмпирической формулой, или уравнением регрессии y на x) интересна тем, что позволяет находить значения функции f для нетабличных значений x , «сглаживая» результаты измерений величины y , т.е. на всем интервале изменения x . Оправданность такого подхода определяется в конечном счете практической полезностью полученной формулы.

3.2. Метод наименьших квадратов

Через имеющееся «облако» точек всегда можно попытаться провести линию установленного вида, которая является наилучшей в определенном смысле среди всех линий данного вида, то есть «ближайшей» к точкам наблюдений по их совокупности. Для этого определим вначале понятие близости линии к некоторому множеству точек на плоскости. Меры такой близости могут быть различными [13]. Однако любая разумная мера должна быть связана с расстоянием от точек наблюдения до рассматриваемой линии (задаваемой уравнением $y=F(x)$).

Предположим, что приближающая функция $F(x)$ в точках x_1, x_2, \dots, x_n имеет значения y_1, y_2, \dots, y_n . Часто в качестве критерия близости используется минимум суммы квадратов разностей наблюдений зависимой переменной y_i и теоретических, рассчитанных по уравнению регрессии значений y_i . Здесь считается, что y_i и x_i – известные данные наблюдений, а F – уравнение линии регрессии с неизвестными параметрами (формулы для их вычисления будут приведены ниже). Метод оценивания параметров приближающей функции, минимизирующий сумму квадратов отклонений наблюдений зависимой переменной от значений искомой функции, называется *методом наименьших квадратов (МНК)*, или *Least Squares Method (LS)*.

Итак, задачу приближения функции f теперь можно сформулировать следующим образом: для функции f , заданной таблицей (1), найти функцию F определенного вида так, чтобы сумма квадратов Φ была наименьшей.

$$\Phi = \sum_i (y_i - F(x_i))^2 \rightarrow \min .$$

Рассмотрим метод нахождения приближающей функции в общем виде на примере аппроксимирующей функции с тремя параметрами:

$$y = F(x, a, b, c) . \quad (3)$$

Пусть $F(x_i, a, b, c) = y_i, i=1, 2, \dots, n$. Сумма квадратов разностей соответствующих значений f и F будет иметь вид:

$$\sum_i [y_i - F(x_i, a, b, c)]^2 = \Phi(a, b, c) . \quad (4)$$

Эта сумма является функцией $\Phi(a, b, c)$ трех переменных (параметров a, b и c). Задача сводится к отысканию ее минимума. Используем необходимое условие экстремума:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial b} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial c} = 0 .$$

Получаем систему для определения неизвестных параметров a, b, c .

$$\begin{aligned} \sum_i [y_i - F(x_i, a, b, c)] \cdot F'_a(x_i, a, b, c) &= 0 \\ \sum_i [y_i - F(x_i, a, b, c)] \cdot F'_b(x_i, a, b, c) &= 0 \\ \sum_i [y_i - F(x_i, a, b, c)] \cdot F'_c(x_i, a, b, c) &= 0 . \end{aligned} \quad (5)$$

Решив эту систему трех уравнений с тремя неизвестными относительно параметров a, b, c , мы и получим конкретный вид искомой функции $F(x, a, b, c)$. Как видно из рассмотренного примера, изменение количества параметров не приведет к искажению сущности самого подхода, а выразится лишь в изменении количества уравнений в системе (5).

Естественно ожидать, что значения найденной функции $F(x, a, b, c)$ в точках x_1, x_2, \dots, x_n , будут отличаться от табличных значений y_1, y_2, \dots, y_n . Значения разностей $y_i - F(x_i, a, b, c) = \varepsilon_i (i=1, 2, \dots, n)$ называются отклонениями измеренных значений y от вычисленных по формуле (3). Для найденной эмпирической формулы (2) в соответствии с исходной таблицей (1) можно, следовательно, найти сумму квадратов отклонений $\sigma = \sum_i (\varepsilon_i)^2$, которая в соответствии с методом наименьших квадратов для заданного вида приближающей функции (и найденных значений параметров) должна быть наименьшей. Из двух разных приближений одной и той же табличной

функции, следуя методу наименьших квадратов, лучшим нужно считать то, для которого сумма (4) имеет наименьшее значение.

В экспериментальной практике в качестве приближающих функций в зависимости от характера точечного графика f часто используются приближающие функции с двумя параметрами:

$$\begin{array}{ll}
 1) y = ax + b, & 5) y = \frac{1}{ax+b}, \\
 2) y = ax^2 + bx + c, & 6) y = a \cdot \ln x, \\
 3) y = ax^m, & 7) y = \frac{a}{x} + b, \\
 4) y = ae^{mx}, & 8) y = \frac{x}{ax+b}.
 \end{array}$$

Очевидно, что когда вид приближающей функции установлен, задача сводится только к отысканию значений параметров.

3.3. Нахождение приближающей функции в виде основных элементарных функций

Рассмотрим наиболее часто встречающиеся в практических исследованиях эмпирические зависимости.

3.3.1. Линейная функция (линейная регрессия). Начальным пунктом анализа зависимостей обычно является оценка линейной зависимости переменных. Следует при этом учитывать, однако, что «наилучшая» по методу наименьших квадратов прямая линия всегда существует, но даже наилучшая не всегда является достаточно хорошей. Если в действительности зависимость $y=f(x)$ является квадратичной, то ее не сможет адекватно описать никакая линейная функция, хотя среди всех таких функций обязательно найдется «наилучшая». Если величины x и y вообще не связаны, мы также всегда сможем найти «наилучшую» линейную функцию $y=ax+b$ для данной совокупности наблюдений, но в этом случае конкретные значения a и b определяются только случайными отклонениями переменных и сами будут очень сильно меняться для различных выборок из одной и той же генеральной совокупности.

Рассмотрим теперь задачу оценки коэффициентов линейной регрессии более формально. Предположим, что связь между x и y линейна и искомую приближающую функцию будем искать в виде:

$$F(x, a, b) = ax + b. \tag{6}$$

Найдем частные производные по параметрам: $F'_a = x, \underset{i}{\&F'_b} = 1$.

Подставим полученные соотношения в систему вида (5):

$$\sum_i (y_i - ax_i - b) \cdot x_i = 0,$$

$$\sum_i (y_i - ax_i - b) = 0, \quad i = 1 \dots n.$$

{ }
{ }
{ }

Далее имеем:

$$\sum_i y_i x_i - a \sum_i (x_i)^2 - b \sum_i x_i = 0,$$

$$\sum_i y_i - a \sum_i x_i - nb = 0, \quad i = 1 \dots n.$$

{ }
{ }
{ }

или, деля каждое уравнение на n:

$$\left(\frac{1}{n} \sum_i (x_i)^2\right) \cdot a + \left(\frac{1}{n} \sum_i x_i\right) \cdot b = \frac{1}{n} \sum_i y_i x_i,$$

$$\left(\frac{1}{n} \sum_i x_i\right) \cdot a + b = \frac{1}{n} \sum_i y_i, \quad i = 1 \dots n.$$

{ }
{ }
{ }

Введем обозначения:

$$\frac{1}{n} \sum_i x_i = M_x, \quad \frac{1}{n} \sum_i y_i = M_y,$$

$$\frac{1}{n} \sum_i y_i x_i = M_{xy}, \quad \frac{1}{n} \sum_i (x_i)^2 = M_{x^2}.$$

(7)

Тогда последняя система будет иметь вид:

$$M_{x^2} \cdot a + M_x \cdot b = M_{xy}$$

$$M_x \cdot a + b = M_y.$$

{ }
{ }
{ }

(8)

Коэффициенты этой системы M_x , M_y , M_{xy} , M_x^2 – числа, которые в каждой конкретной задаче приближения могут быть легко вычислены по формулам (7), где x_i , y_i – значения из таблицы (1). Решив систему (8), получим значения параметров a и b , а следовательно, и конкретный вид линейной функции (6).

Необходимым условием для выбора линейной функции в качестве искомой эмпирической формулы является соотношение [38]:

$$y\left(\frac{x_1+x_n}{2}\right) - \sqrt{y(x_1)y(x_n)} = 0 .$$

3.3.2. *Квадратичная функция (квадратичная регрессия).* Будем искать приближающую функцию в виде квадратного трехчлена:

$$F(x, a, b, c) = ax^2 + bx + c . \tag{9}$$

Находим частные производные:

$$F'_a = x^2, \quad F'_b = x, \quad F'_c = 1 .$$

Составим систему вида (5):

$$\begin{aligned} \sum_i (y_i - a(x_i)^2 - bx_i - c) \cdot (x_i)^2 &= 0, \\ \sum_i (y_i - a(x_i)^2 - bx_i - c) \cdot x_i &= 0, \\ \sum_i (y_i - a(x_i)^2 - bx_i - c) &= 0, \quad i = 1..n. \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}$$

После несложных преобразований получается система трех линейных уравнений с тремя неизвестными a, b, c . Коэффициенты системы так же, как и в случае линейной функции, выражаются только через известные данные из таблицы (1):

$$\begin{aligned} M_{x^4} \cdot a + M_{x^3} b + M_{x^2} c &= M_{x^2 y} \\ M_{x^3} a + M_{x^2} b + M_x c &= M_{xy} \\ M_{x^2} a + M_x b + c &= M_y . \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}$$

Здесь использованы обозначения (7), а также

$$\frac{1}{n} \sum_i (x_i)^4 = M_{x^4}, \quad \frac{1}{n} \sum_i (x_i)^3 = M_{x^3}, \quad \frac{1}{n} \sum_i (x_i)^2 y_i = M_{x^2 y} .$$

Решение системы (10) дает значение параметров a , b и c для приближающей функции (9).

Квадратичная регрессия применяется, если все выражения вида $y_2 - 2y_1 + y_0$, $y_3 - 2y_2 + y_1$, $y_4 - 2y_3 + y_2$ и т.д. мало отличаются друг от друга.

3.3.3. *Степенная функция (геометрическая регрессия)*. Найдем теперь приближающую функцию в виде:

$$F(x, a, m) = ax^m. \quad (11)$$

Предполагая, что в исходной таблице (1) значения аргумента и значения функции положительны, прологарифмируем равенство (11) при условии $a > 0$:

$$\ln F = \ln a + m \cdot \ln x. \quad (12)$$

Так как функция F является приближающей для функции f , функция $\ln F$ будет приближающей для функции $\ln f$. Введем новую переменную $u = \ln x$; тогда, как следует из (12), $\ln F$ будет функцией от u : $\Phi(u)$.

Обозначим

$$m = A, \quad \ln a = B. \quad (13)$$

Теперь равенство (12) принимает вид:

$$\Phi(u, A, B) = Au + B, \quad (14)$$

т.е. задача свелась к отысканию приближающей функции в виде линейной. Практически для нахождения искомой приближающей функции в виде степенной (при сделанных выше предположениях) необходимо проделать следующее:

1) по данной таблице (1) составить новую таблицу, прологарифмировав значения x и y в исходной таблице;

2) по новой таблице найти параметры A и B приближающей функции вида (14);

3) используя обозначения (13), найти значения параметров a и m и подставить их в выражение (11).

Необходимым условием для выбора степенной функции в качестве искомой эмпирической формулы является соотношение [38]:

$$y(\sqrt{x_1 x_n}) - \sqrt{y(x_1) y(x_n)} = 0.$$

3.3.4. *Показательная функция*. Пусть исходная таблица (1) такова, что приближающую функцию целесообразно искать в виде показательной функции:

$$F(x, a, m) = a \cdot e^{mx}, \quad a > 0 \quad (15)$$

Прологарифмируем равенство (15):

$$\ln F = \ln a + mx \quad (16)$$

Приняв обозначения (13), перепишем (16) в виде:

$$\ln F = Ax + B \quad (17)$$

Таким образом, для нахождения приближающей функции в виде (15) нужно прологарифмировать значения функции в исходной таблице (1) и, рассматривая их совместно с исходными значениями аргумента, построить для новой таблицы приближающую функцию вида (17). Вслед за этим в соответствии с обозначениями (13) остается получить значения искомых параметров a и b и подставить их в формулу (15).

Необходимым условием для выбора показательной функции в качестве искомой эмпирической формулы является соотношение [38]:

$$y\left(\frac{x_1 + x_n}{2}\right) - \sqrt{y(x_1)y(x_n)} = 0 \quad .$$

3.3.5. Дробно-линейная функция. Будем искать приближающую функцию в виде:

$$F(x, a, b) = \frac{1}{ax + b} \quad (18)$$

Равенство (18) перепишем следующим образом:

$$\frac{1}{F(x, a, b)} = ax + b \quad .$$

Из последнего равенства следует, что для нахождения значений параметров a и b по заданной таблице (1) нужно составить новую таблицу, у которой значения аргумента оставить прежними, а значения функции заменить обратными числами, после чего для полученной таблицы найти приближающую функцию вида $ax + b$. Найденные значения параметров a и b подставить в формулу (18).

Необходимым условием для выбора дробно-линейной функции в качестве искомой эмпирической формулы является соотношение [38]:

$$y\left(\frac{x_1 + x_n}{2}\right) - \frac{2y(x_1)y(x_n)}{y(x_1) + y(x_n)} = 0 \quad .$$

3.3.6. Логарифмическая функция. Пусть приближающая функция имеет вид:

$$F(x, a, b) = a \cdot \ln x + b \quad (19)$$

Легко видеть, что для перехода к линейной функции достаточно сделать подстановку $\ln x = u$. Отсюда следует, что для нахождения значений a и b нужно прологарифмировать значения аргумента в исходной таблице (1) и, рассматривая полученные значения в совокупности с исходными значениями функции, найти для полученной таким образом новой таблицы приближающую функцию в виде линейной. Коэффициенты a и b найденной функции подставить в формулу (19).

Необходимым условием для выбора логарифмической функции в качестве искомой эмпирической формулы является соотношение [38]:

$$y(\sqrt{x_1 x_n}) - \frac{y(x_1) + y(x_n)}{2} = 0 .$$

3.3.7. *Гипербола.* Если точечный график, построенный по таблице (1), дает ветвь гиперболы, приближающую функцию можно искать в виде:

$$F(x, a, b) = \frac{a}{x} + b . \quad (20)$$

Для перехода к линейной функции сделаем подстановку $u = \frac{1}{x}$.

$$\Phi(u, a, b) = au + b . \quad (21)$$

Практически перед нахождением приближающей функции вида (20) значения аргумента в исходной таблице (1) следует заменить обратными числами и найти для новой таблицы приближающую функцию в виде линейной вида (21). Полученные значения параметров a и b подставить в формулу (20).

Необходимым условием для выбора уравнения гиперболы в качестве искомой эмпирической формулы является соотношение [38]:

$$y\left(\frac{2x_1 x_n}{x_1 + x_n}\right) - \frac{y(x_1) + y(x_n)}{2} = 0 .$$

3.3.8. *Дробно-рациональная функция.* Пусть приближающая функция находится в виде:

$$F(x, a, b) = \frac{x}{ax + b} . \quad (22)$$

Очевидно, что

$$\frac{1}{F(x, a, b)} = a + \frac{b}{x} ,$$

так что задача сводится к случаю, рассмотренному в предыдущем пункте. Действительно, если в исходной таблице заменить значения x и y их обрат-

ными величинами по формулам $u = \frac{1}{y}$ и $z = \frac{1}{x}$ и искать для новой таблицы приближающую функцию вида $u = bz + a$, то найденные значения a и b будут искомыми для формулы (22).

Необходимым условием для выбора дробно-рациональной функции в качестве искомой эмпирической формулы является соотношение [38]:

$$y\left(\frac{2x_1 x_n}{x_1 + x_n}\right) - \frac{2y(x_1)y(x_n)}{y(x_1) + y(x_n)} = 0 .$$

В заключение отметим: может получиться, что ни одна из рассмотренных выше функций не приближает достаточно удовлетворительно имеющиеся эмпирические данные. В таком случае вид эмпирической кривой выбирают исходя из каких-то других известных данных о поведении функции. Иногда это помогают сделать специальные компьютерные программы аппроксимации экспериментальных данных [38].

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №3

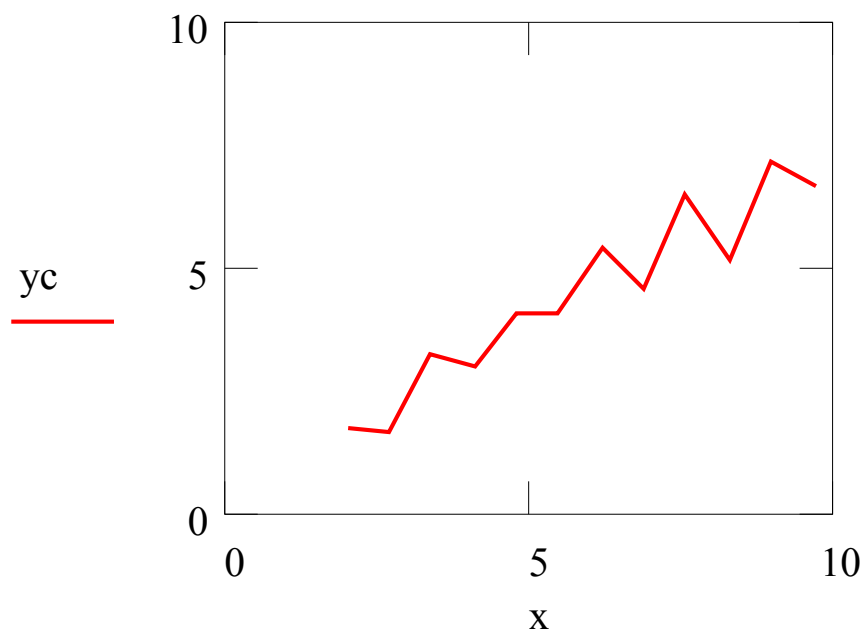
Задание: Аппроксимировать функцию, заданную таблично, линейной функцией.

Образец выполнения задания

Зададим функцию таблично

$n := 11$	<i>число значений аргумента</i>
$a := 2$	<i>начальное значение аргумента</i>
$h := 0.7$	<i>шаг изменения аргумента</i>
$aa := 0.3 \quad bb := 0.7$	<i>числовые коэффициенты</i>
$i := 0..n$	
$x_i := a + i \cdot h$	<i>значения аргумента</i>
$yc_i := (-1)^i \cdot \text{rnd}(1) + aa + bb \cdot x_i$	<i>значения функции, случайная добавка $(-1)^i \text{rnd}(1)$ позволяет придать данным естественный вид.</i>

Графическое представление полученной функции



Вспользуемся формулами для вычисления коэффициентов линейной зависимости:

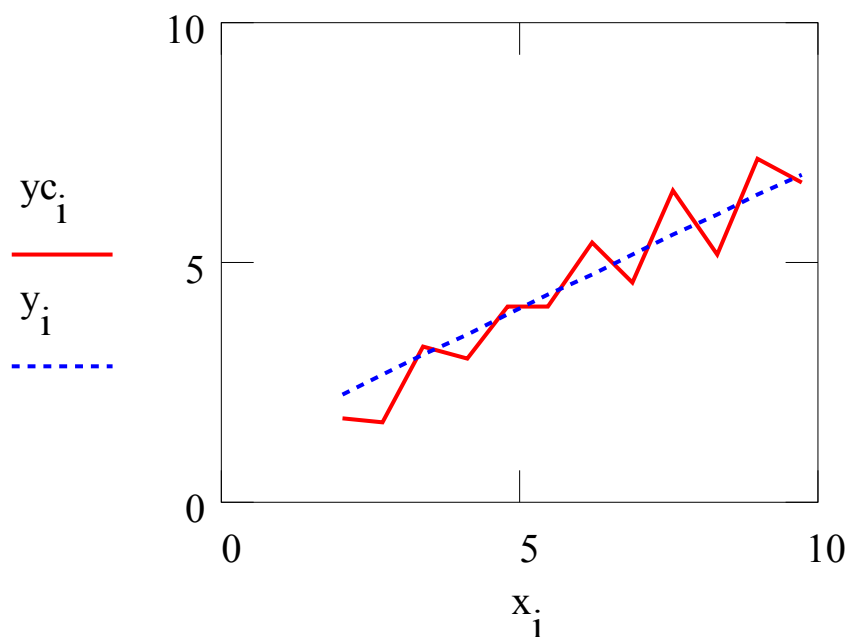
$$m1 := \sum_i x_i \quad m2 := \sum_i (x_i)^2 \quad m3 := \sum_i y_{c_i} \quad m4 := \sum_i y_{c_i} \cdot x_i$$

$$ab := \begin{bmatrix} n & m1 \\ m1 & m2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} m3 \\ m4 \end{bmatrix}$$

$$ab = \begin{bmatrix} 1.036 \\ 0.597 \end{bmatrix}$$

$$y_i := ab_0 + ab_1 \cdot x_i \quad \text{искомая линейная функция}$$

Проиллюстрируем решение графически:



В пакете MathCad имеются встроенные функции, которые позволяют быстрее решить задачу линейной регрессии. Это выполняется функцией **slope(vx,vy)**, которая вычисляет наклон линии регрессии в смысле наименьших квадратов для данных из **vx** и **vy**, и функцией **intercept(vx,vy)**, которая вычисляет смещение по оси ординат линии регрессии. Окончательно линия регрессии определяется в виде:

$$y = \text{slope}(vx,vy) * x + \text{intercept}(vx,vy)$$

На рисунке 7 показано, как можно использовать эти функции, чтобы провести линию через набор выборочных точек.

4. Множественная линейная регрессия

4.1. Понятие функции нескольких переменных

До сих пор мы касались вопросов, связанных с исследованием функции одной переменной, т.е. изучали совместное изменение двух переменных, одна из которых зависела от другой. Значением независимой переменной полностью определялось значение зависимой переменной, или функции. На практике значения географических переменных определяются обычно влиянием не одного, а нескольких объясняющих факторов. Например, хотя продуктивность водоема и зависит от продолжительности солнечного освещения, но очевидно, что это не единственный определяющий фактор, здесь важны и интенсивность освещения, и загрязненность водоема, и его географическое расположение, а также целый ряд дополнительных факторов. Таким образом, независимых переменных часто оказывается несколько, и для определения значения функции необходимо установить значения, совместно принимаемые всеми этими независимыми переменными. В таком случае зависимость $y=f(x)$ означает, что x – вектор, содержащий m компонентов: $x=(x_1, x_2, \dots, x_m)$.

4.2. Постановка задачи множественной линейной регрессии

Пусть в результате измерений в процессе опыта получена таблица некоторой зависимости f :

x_1			...	
x_2			...	
...
x_m			...	
$y=f(\vec{x})$	y_1	y_2	...	y_n

Требуется найти формулу, выражающую эту зависимость аналитически, т.е. найти функцию заданного вида $y=F(x_1, x_2, \dots, x_m)$, которая в точках x_1, x_2, \dots, x_n принимает значения, как можно более близкие к значениям y_1, y_2, \dots, y_n .

Мы будем говорить только о линейной зависимости y от x , то есть о множественной линейной регрессии. Теоретически уравнение $y=F(x)$ имеет вид:

$$y=a_0+a_1x_1+a_2x_2+\dots+a_mx_m.$$

Здесь a – вектор неизвестных параметров размерности $(m+1)$.

Мы ограничимся рассмотрением частного случая $m=2$. Тогда приближающая функция примет следующий вид:

$$F(x) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2.$$

Пусть имеется n наблюдений вектора x и зависимой переменной y . Для того, чтобы формально можно было решить задачу, то есть найти некоторый наилучший вектор параметров, должно быть $n \geq m+1$. Если это условие не выполняется, то можно найти бесконечно много разных векторов коэффициентов, при которых линейная формула связывает между собой x и y для имеющихся наблюдений абсолютно точно. Если в частном случае $n=m+1$ (например, при $m=2$ и $n=3$), то оценки коэффициентов a рассчитываются единственным образом – путем решения системы линейных уравнений $y_j = a_0 + a_1x_{1j} + a_2x_{2j}$; $j=1, \dots, 3$. Графически это означает, что через три точки наблюдения в трехмерном пространстве можно провести единственную плоскость, определяемую параметрами a_0, a_1, a_2 . Если число наблюдений больше минимально необходимого, то есть $n > 3$, то уже нельзя подобрать линейную формулу, в точности удовлетворяющую всем наблюдениям, и возникает необходимость оптимизации, то есть выбора наилучшей формулы-приближения для всех наблюдений.

Более подробно с вопросом приближения функций нескольких переменных можно ознакомиться в [13, 18].

Глава 2. ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

Из курса физики хорошо известен принцип сохранения энергии в замкнутой системе. При исследовании природных зависимостей любые изменения энергии системы почти всегда приводят к необходимости вычисления различного рода интегралов от соответствующих функций. Известное из курса математического анализа вычисление определенного интеграла по формуле Ньютона-Лейбница $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ реализовать на практике оказывается не всегда возможно. Например, может случиться, что первообразная $F(x)$ не выражается через элементарные функции или через другие достаточно изученные функции либо выражается слишком сложно. В этих случаях приходится обращаться к методам приближенного интегрирования, т.е. к методам, позволяющим найти численное значение определенного интеграла приближенно с любой степенью точности.

1. Методы численного интегрирования

1.1. Метод прямоугольников

Идея численного интегрирования предельно проста и вытекает из геометрического смысла определенного интеграла – значение определенного интеграла численно равно площади криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y=f(x)$, осью абсцисс и прямыми $x=a$, $x=b$. Находя приближенно площадь криволинейной трапеции, мы получаем значение интеграла. Формально процедура численного интегрирования заключается в том, что отрезок $[a, b]$ разбивается на n частичных отрезков, а затем подынтегральная функция заменяется на нем легко интегрируемой функцией, по определенной зависимости интерполирующей значения подынтегральной функции в точках разбиения. Рассмотрим теперь простейшие из численных методов интегрирования.

Итак, функция $y=f(x)$ интегрируема на сегменте $[a, b]$ и требуется вычислить ее интеграл $\int_a^b f(x)dx$. Составим интегральную сумму для $f(x)$ на

сегменте $[a,b]$. Для этого разобьем сегмент $[a,b]$ на n равных между собой частей с помощью точек: $x_1, x_2, \dots, x_k, \dots, x_{n-1}$.

Если длину каждой части мы обозначим через Δx , так что $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, то для каждой точки x_k будем иметь: $x_k = a + k\Delta x$ ($k=0, 1, 2, \dots, n$).

Обозначим теперь через y_k значение подынтегральной функции $f(x)$ при $x = x_k = a + k\Delta x$, то есть положим ($k=0, 1, \dots, n$).

Тогда суммы $\sum_{k=1}^n y_{k-1} \Delta x$ и $\sum_{k=1}^n y_k \Delta x$ будут интегральными для функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$. (При составлении первой суммы мы рассматриваем значения функции $y=f(x)$ в точках, являющихся левыми концами частичных сегментов, а при составлении второй суммы – в точках, являющихся правыми концами этих сегментов.)

По определению интеграла имеем:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n y_{k-1} \Delta x \quad \text{и} \quad \int_a^b f(x) dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n y_k \Delta x .$$

Поэтому в качестве приближенного значения $\int_a^b f(x) dx$ естественно взять

интегральную сумму $\sum_{k=1}^n y_{k-1} \Delta x$ и $\sum_{k=1}^n y_k \Delta x$, т.е. положить:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n y_{k-1} \Delta x ,$$

а также

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n y_k \Delta x ,$$

т.е.

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} (y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1}) \quad (1)$$

и

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} (y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_n) \quad (2)$$

Эти приближенные равенства называются формулами прямоугольников.

В том случае, когда $f(x) \geq 0$, формулы (1) и (2) с геометрической точки зрения означают, что площадь криволинейной трапеции $aABb$, ограниченной дугой кривой $y=f(x)$, осью Ox и прямыми $x=a$ и $x=b$, принимается приближенно равной площади ступенчатой фигуры, образованной из n прямо-

угольников с основаниями $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ и высотами: $y_0, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$ – в случае формулы (1) (рис. 8) и $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ – в случае формулы (2) (рис. 9).

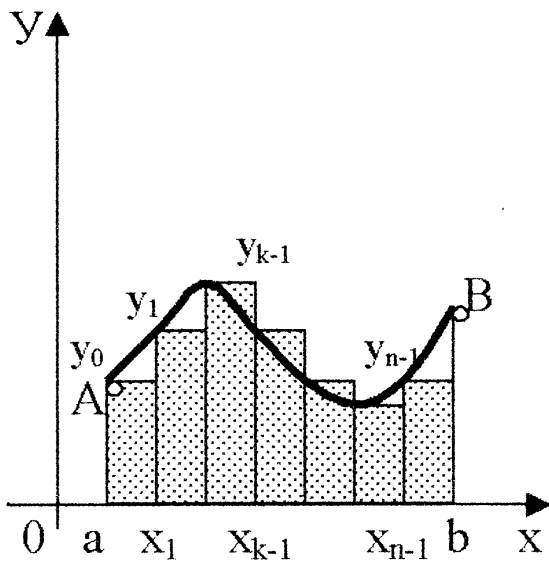


Рис. 8

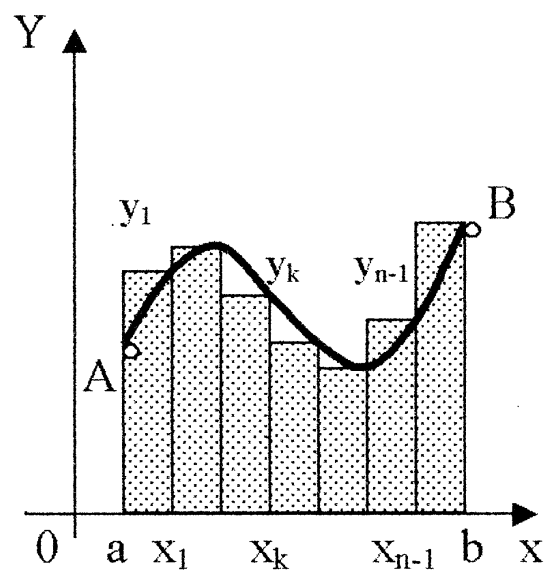


Рис. 9

Исходя из приведенного выше геометрического смысла формул (1) и (2) способ приближенного вычисления определенного интеграла по этим формулам принято называть *методом прямоугольников*.

Всякое приближенное вычисление имеет определенную ценность лишь тогда, когда оно сопровождается оценкой допущенной при этом погрешности. Поэтому формулы прямоугольников будут практически пригодны для приближенного вычисления интегралов лишь в том случае, если будет существовать удобный способ оценки получающейся при этом погрешности (при заданном n), позволяющий к тому же находить и число частей n разбиения сегмента, гарантирующее требуемую степень точности приближенного вычисления.

Будем предполагать, что функция $f(x)$ имеет ограниченную производную на сегменте $[a, b]$, так что существует такое число $M > 0$, что для всех значений x из $[a, b]$ выполняется неравенство $|f'(x)| \leq M$. Качественный смысл этого неравенства заключается в том, что скорость изменения значения функции ограничена. В реальных природных системах это требование практически всегда выполнено. В этих условиях абсолютная величина

погрешности R_n , которую мы допускаем, вычисляя интеграл $\int_a^b f(x)dx$ по формуле прямоугольников, может быть оценена по формуле [27]:

$$|R_n| \leq M(b-a)^2/2n. \quad (3)$$

При неограниченном возрастании n выражение $M(b-a)^2/2n$, а следовательно, и абсолютная величина погрешности R_n будет стремиться к нулю, т.е. точность приближения будет тем больше, чем на большее число равных частей будет разделен сегмент $[a, b]$. Абсолютная погрешность результата будет заведомо меньше заданного числа $\varepsilon > 0$, если взять

$$n > M(b-a)^2/2\varepsilon.$$

Следовательно, для вычисления интеграла $\int_a^b f(x)dx$ с указанной степенью точности достаточно сегмент $[a, b]$ разбить на число частей, большее числа $M(b-a)^2/2\varepsilon$. [27].

Метод прямоугольников – это наиболее простой и вместе с тем наиболее грубый метод приближенного интегрирования. Заметно меньшую погрешность дает другой метод – метод трапеций.

1.2. Метод трапеций

Очевидно, что чем больше будет число n отрезков разбиения, тем более точный результат дадут формулы (1) и (2). Однако увеличение числа отрезков разбиения промежутка интегрирования не всегда возможно. Поэтому большой интерес представляют формулы, дающие более точные результаты при том же числе точек разбиения.

Простейшая из таких формул получается как среднее арифметическое правых частей формул (1) и (2):

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{n} \cdot \frac{\sum_{k=0}^{n-1} y_k + \sum_{k=0}^{n-1} y_{k+1}}{2} = \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y_k + y_{k+1}}{2}. \quad (4)$$

Легко усмотреть геометрический смысл этой формулы. Если на каждом отрезке разбиения дугу графика подынтегральной функции $y=f(x)$ заменить стягивающей ее хордой (линейная интерполяция), то мы получим трапецию, площадь которой равна $\frac{b-a}{n} \cdot \frac{y_k + y_{k+1}}{2}$ и, следовательно, формула (4) представляет собой площадь фигуры, состоящей из таких трапеций (рис. 10). Из геометрических соображений понятно, что площадь такой фигуры будет, вообще говоря, более точно выражать площадь криволи-

нейной трапеции, нежели площадь ступенчатой фигуры, рассматриваемой в методе прямоугольников.

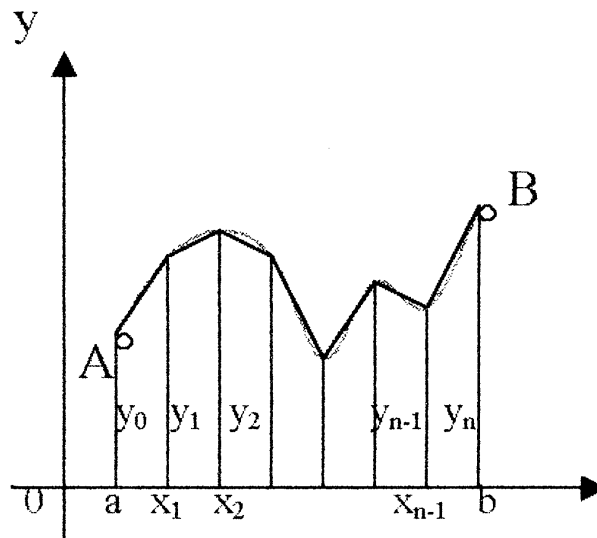


Рис. 10

Приведя в формуле (4) подобные члены, окончательно получим

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} \left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2} \right) \quad (5)$$

Формулу (5) называют *формулой трапеций*.

Формулой трапеций часто пользуются для практических вычислений. Что касается оценки погрешности R_n , возникающей при замене левой части (5) правой, то доказывается, что абсолютная величина ее удовлетворяет неравенству:

$$|R_n| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} M_2, \quad (6)$$

где M_2 – максимум модуля второй производной подынтегральной функции на отрезке $[a, b]$, т.е.

$$M_2 = \max_{x \in [a, b]} |f''(x)|.$$

Следовательно, R_n убывает при $n \rightarrow \infty$ по крайней мере так же быстро, как $\frac{1}{n^2}$. Абсолютная погрешность R_n будет меньше наперед заданного числа ε

> 0 , если взять $n > \sqrt{\frac{M(b-a)}{12\varepsilon}}$.

1.3. Метод парабол (метод Симпсона)

Значительное повышение точности приближенных формул может быть достигнуто за счет повышения порядка интерполяции. Одним из таких методов приближенного интегрирования является метод парабол. Идея метода исходит из того, что на частичном промежутке дуга некоторой параболы в общем случае теснее прилегает к кривой $y=f(x)$, чем хорда, соединяющая концы дуги этой кривой, и поэтому значения площадей соответствующих элементарных трапеций, ограниченных «сверху» дугами парабол, являются более близкими к значениям площадей соответствующих частичных криволинейных трапеций, ограниченных сверху дугой кривой $y=f(x)$, чем значения площадей соответствующих прямолинейных трапеций. Сущность метода заключается в следующем. Отрезок $[a,b]$ делится на $2n$ равных частей. Пусть точки деления будут

$$x_0=a, x_1, x_2, \dots, x_{2n-2}, x_{2n-1}, x_{2n}=b,$$

а y_0, y_1, \dots, y_{2n} – соответствующие значения подынтегральной функции на отрезке $[a,b]$. Произведем квадратичную интерполяцию данной подынтегральной функции на каждом из отрезков разбиения (заменяем дугу графика подынтегральной функции дугой параболы с вертикальной осью) (рис. 11). Приведем без вывода формулу парабол в окончательном виде:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{6n} \cdot [(y_0 + y_{2n}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2n-2}) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2n-1})]. \quad (7)$$

Подробный вывод формулы (7) см. в [13].

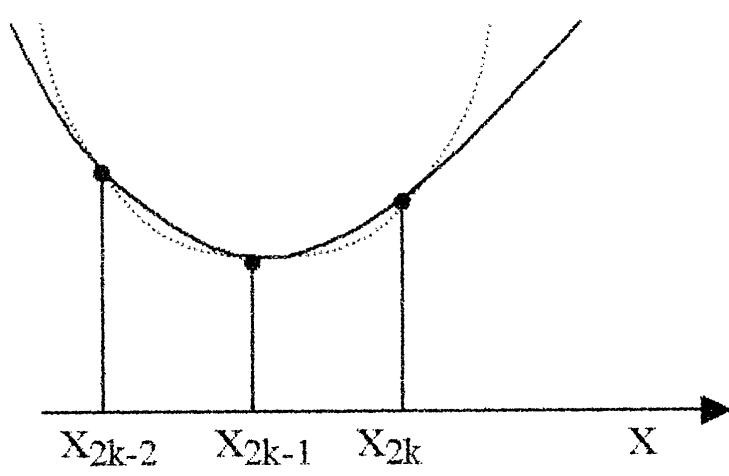


Рис. 11

Если подынтегральная функция $f(x)$ имеет на отрезке $[a,b]$ непрерывную четвертую производную, то для поправочного члена формулы (7) имеет место оценка

$$|R_n| \leq \frac{(b-a)^5}{180(2n)^4} M_4, \quad (8)$$

где M_4 - максимум модуля четвертой производной подынтегральной функции на отрезке $[a,b]$.

Сравнивая между собой оценки (6) и (8), замечаем, что с увеличением n поправочный член формулы трапеций уменьшается пропорционально величине $\frac{1}{n^2}$, а для формулы парабол – пропорционально величине $\frac{1}{n^4}$, т.е. метод парабол сходится значительно быстрее метода трапеций, тогда как с точки зрения техники вычислений оба метода одинаковы.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №4

Задание: Вычислить интеграл по формулам левых и правых прямоугольников и по формуле трапеций при $n=100$. Сравнить полученные результаты со значением интеграла, вычисленным с помощью встроенных функций MathCad.

Образец выполнения задания

$$f(x) := 2 \cdot x$$

задание подынтегральной функции

$$a := 0 \quad b := 1$$

значения границ отрезка интегрирования

$$n := 100$$

число точек разбиения отрезка

$$h := \frac{b-a}{n}$$

величина h – длина отрезка разбиения

вычисление интеграла

$$i := 0..n$$

$$x_i := i \cdot h$$

$$y_i := f(x_i)$$

$$k := 0..n-1$$

$$p := 1..n$$

$$slev := \sum_k y_k \cdot h$$

$$spr := \sum_p y_p \cdot h$$

$$slev = 0.99$$

$$spr = 1.01$$

формула
левых
прямоугольников

формула
правых
прямоугольников

формула
трапеций

$$t := 0.. n - 1$$

$$str := \sum_t (y_t + y_{t+1}) \cdot \frac{h}{2}$$

$$str = 1$$

Проверка полученного результата с помощью встроенных функций MathCad для вычисления определенного интеграла:

$$\int_0^1 2 \cdot x dx = 1$$

Вычисление интеграла в пакете MathCAD осуществляется по формуле Симпсона

Глава 3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Решение большинства задач естествознания после соответствующих упрощений сводится к решению уравнений, содержащих искомую функцию или несколько функций, зависящих от одного или нескольких аргументов, сами эти аргументы и производные различных порядков от искомым функций, так называемых дифференциальных. Дифференциальное уравнение, полученное в результате исследования какого-либо реального процесса или явления, называют дифференциальной моделью этого явления или процесса. Мы будем рассматривать лишь модели, описываемые *обыкновенными дифференциальными уравнениями*, то есть уравнениями, в которых неизвестные функции зависят только от одной переменной.

1. Постановка задачи Коши

Обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида

$$y' = f(x, y). \quad (1)$$

Решением дифференциального уравнения является некоторая функция $y(x)$, которая при подстановке в выражение обращает его в тождество. Существует множество решений (так называемых частных решений) дифференциального уравнения (1), которые могут быть объединены и записаны в виде общего решения

$$y = y(x, C), \quad (2)$$

где C – произвольная постоянная. Геометрически это можно интерпретировать как семейство интегральных кривых, каждая из которых является графиком решения (1) – рис. 12.

Для выбора одной кривой из семейства (частного решения $y = y(x, c)$) необходимо задать начальные условия

$$y(x_0) = y_0, \quad (3)$$

то есть одну точку на искомой кривой решения.

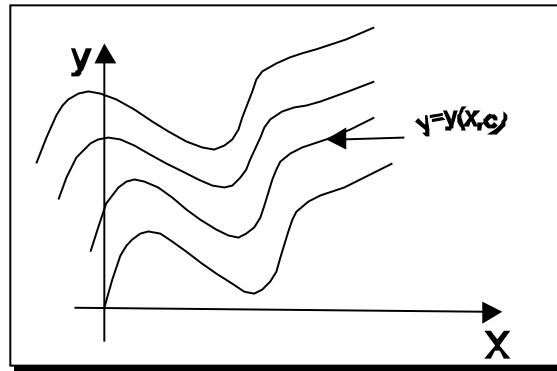


Рис. 12

Как правило, практическое значение всегда имеет частное решение дифференциального уравнения. Задача нахождения частного решения уравнения (1), соответствующего начальным условиям (3), называется *задачей Коши*.

2. Методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений

В классическом анализе разработано немало приемов нахождения решений дифференциальных уравнений через элементарные функции. Между тем при решении практических задач эти методы оказываются, как правило, либо совсем бесполезными, либо их решение связано с недопустимыми затратами усилий и времени. Для решения прикладных задач созданы методы приближенного решения дифференциальных уравнений, которые условно можно подразделить на три основные группы.

1. *Аналитические методы*, применение которых даст решение дифференциальных уравнений в виде аналитической функции (метод Пикара, [17]).

2. *Графические методы*, дающие приближенное решение в виде графика (метод Эйлера).

3. *Численные методы*, когда искомая функция получается в виде таблицы (метод Рунге-Кутты).

Ниже рассматриваются относящиеся к указанным группам некоторые избранные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка вида (1). Что же касается дифференциальных уравнений n -го порядка:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \quad (4)$$

для которых задача Коши состоит в нахождении решения $y=y(x)$, удовлетворяющего начальным условиям

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0', \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \quad (5)$$

где $y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}$ – заданные числа, то их можно свести к системе дифференциальных уравнений первого порядка. Так, например, уравнение второго порядка

$$y'' = f(x, y, y'), \quad (6)$$

можно записать в виде системы двух уравнений первого порядка при помощи стандартной замены:

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = f(x, y, z) \end{cases}. \quad (7)$$

Методы решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений основываются на соответствующих методах решения одного уравнения (см. [17]).

Очевидно, что ставить вопрос об отыскании приближенных значений интеграла или решения $y(x)$ уравнения (1) можно в том и только в том случае, если решение $y(x)$, удовлетворяющее условию (3), существует и единственно. Как известно из общей теории дифференциальных уравнений, для этого достаточно, чтобы фигурирующая в правой части уравнения (1) функция $f(x, y)$ была непрерывна в рассматриваемой области по обоим аргументам и имела ограниченную частную производную.

3. Метод Эйлера

В основе метода ломаных Эйлера лежит идея графического построения решения дифференциального уравнения. Этот метод дает одновременно и способ нахождения искомой функции в численной (табличной) форме.

Идея метода заключается в том, что на малом промежутке изменения независимой переменной

$$x_0 \leq x \leq x_0 + h = x_1$$

интегральная кривая дифференциального уравнения

$$y' = f(x, y) \quad (8)$$

заменяется отрезком прямой (касательной)

$$y - y_0 = f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0).$$

Отсюда и процесс можно повторить для промежутка и т.д. Число h является здесь шагом таблицы. Геометрически интегральная кривая заменяется при этом ломаной, называемой ломаной Эйлера (рис.13).

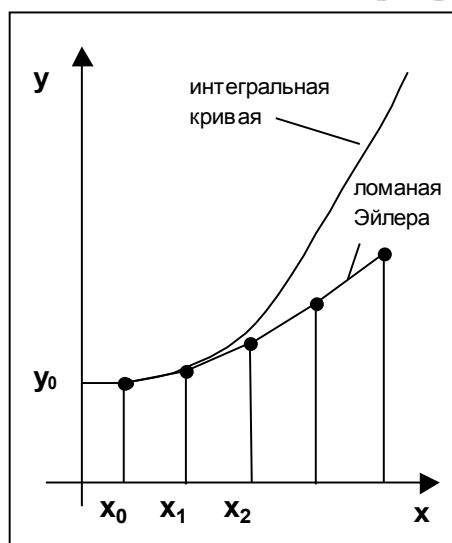


Рис. 13

Рабочая формула для определения значений y по методу Эйлера имеет вид

$$y_{k+1} = y_k + \Delta y_k, \quad (9)$$

где

$$\Delta y_k = f(x_k, y_k) \cdot h, \quad y_k = y(x_k), \quad x_k = x_0 + kh.$$

Метод Эйлера обладает малой точностью, к тому же погрешность каждого нового шага, вообще говоря, систематически возрастает. Наиболее приемлемым для практики методом оценки точности является в данном случае метод двойного счета – с шагом h и с шагом $h/2$. Совпадение десятичных знаков в полученных двумя способами результатах дает естественные основания считать их верными. Ошибка метода пропорциональна h^2 . Существуют различные уточнения метода Эйлера, повышающие его точность так, что ошибка метода становится пропорциональной h^3 [13].

4. Метод Рунге-Кутты

Пусть дано дифференциальное уравнение первого порядка

$$y' = f(x, y)$$

с начальными условиями $y(x_0) = y_0$. Выберем шаг h и для краткости введем обозначения $x_i = x_0 + ih$ и $y_i = y(x_i)$, ($i = 0, 1, 2, \dots$).

В вычислительной практике наиболее часто используется метод Рунге-Кутты. Приведем без вывода один из вариантов соответствующих расчетных формул:

$$\begin{cases} k_1^{(i)} = h \cdot f(x_i, y_i), \\ k_2^{(i)} = h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1^{(i)}}{2}\right), \\ k_3^{(i)} = h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2^{(i)}}{2}\right), \\ k_4^{(i)} = h \cdot f\left(x_i + h, y_i + k_3^{(i)}\right). \end{cases} \quad (9)$$

Последовательные приближения y_i искомой функции y определяются по формуле:

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i,$$

где

(10)

$$\Delta y_i = \frac{1}{6} (k_1^{(i)} + 2k_2^{(i)} + 2k_3^{(i)} + k_4^{(i)}), \quad (i = 0, 1, 2, \dots).$$

Отметим, что в этом случае погрешность на шаге пропорциональна пятой степени шага (h^5). Отсюда, в частности, следует, что при достаточно малом h и малых погрешностях вычислений решение уравнения (1), полученное методом Рунге-Кутты по формулам (9), будет близким к точному.

Геометрический смысл использования метода Рунге-Кутты с расчетными формулами (9) состоит в следующем. Из точки (x_i, y_i) сдвигаются в направлении, определяемом углом α_1 , для которого $\operatorname{tg} \alpha_1 = f(x_i, y_i)$. На этом направлении выбирается точка с координатами $(x_i + h/2, y_i + k_1/2)$. Затем из точки (x_i, y_i) сдвигаются в направлении, определяемом углом α_2 , для которого $\operatorname{tg} \alpha_2 = f(x_i + h/2, y_i + k_1/2)$, и на этом направлении выбирается точка с координатами $(x_i + h/2, y_i + k_2/2)$. Наконец, из точки (x_i, y_i) сдвигаются в направлении, определяемом углом α_3 , для которого $\operatorname{tg} \alpha_3 = f(x_i + h/2, y_i + k_2/2)$, и на этом направлении выбирается точка с координатами $(x_i + h, y_i + k_3)$. Этим задается еще одно направление, определяемое углом α_4 , для которого $\operatorname{tg} \alpha_4 = f(x_i + h, y_i + k_3)$. Четыре полученных направления усредняются в соответствии с последней из формул (9). На этом окончательном направлении и выбирается очередная точка $(x_{i+1}, y_{i+1}) = (x_i + h, y_i + \Delta y)$.

5. Численное интегрирование систем обыкновенных дифференциальных уравнений

Метод Рунге-Кутты применяется также для приближенного решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Пусть, например, дана система дифференциальных уравнений:

$$y' = f(x, y), \quad (11)$$

где

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \quad y' = \begin{bmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_n \end{bmatrix} \quad f = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}.$$

Под решением системы (11) понимается любая совокупность функций $(y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x))$, которая, будучи подставлена в уравнения (11), обращает их в тождества. Так как система дифференциальных уравнений имеет бесчисленное множество решений, то для выделения одного конкретного решения $y = y(x)$ кроме уравнения нужны дополнительные условия. В простейшем случае задаются начальные условия

$$y(x_0) = y^{(0)}, \quad (12)$$

что приводит к задаче Коши.

Задача Коши. Найти решение

$$y = y(x)$$

системы (11), удовлетворяющее заданным начальным условиям (12), где x_0 – фиксированное значение независимой переменной и

$$y^{(0)} = \begin{bmatrix} y_1^{(0)} \\ \vdots \\ y_n^{(0)} \end{bmatrix}$$

– данная система чисел.

Если x интерпретировать как время, а y_1, \dots, y_n – как обобщенные координаты некоторой механической системы, то получим следующий аспект задачи Коши: зная дифференциальные уравнения, управляющие механической системой, а также состояние ее в начальный момент времени x_0 , определить состояние системы в любой момент времени x .

Задавшись некоторым шагом h и введя стандартные обозначения $x_i = x_0 + ih$ и $y_i = y_i(x)$, $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$ при $i = 0, 1, 2, \dots$, положим:

$$\begin{cases} k_1^{(0)} = hf(x_0, y_0), \\ k_2^{(0)} = hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1^{(0)}}{2}\right), \\ k_3^{(0)} = hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2^{(0)}}{2}\right), \\ k_4^{(0)} = hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + k_3^{(0)}\right). \end{cases} \quad (13)$$

Согласно методу Рунге-Кутты, Δy_0 приближенно определяют по формуле

$$\Delta y_0 = \frac{1}{6} (k_1^{(0)} + 2k_2^{(0)} + 2k_3^{(0)} + k_4^{(0)}), \quad (14)$$

отсюда

$$y_1 = y_0 - \Delta y_0.$$

Далее, приняв (x_1, y_1) за исходные данные и повторяя тот же процесс, находим y_2 . Аналогично вычисляются

$$y_i \ (i=3, 4, 5, \dots).$$

Более подробно с методами решений систем уравнений можно познакомиться в [13].

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №5

Задание: Методом Рунге-Кутты найти решение дифференциального уравнения $y' = \sin(x) + \frac{1}{y}$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 1$ на отрезке $[0, 8\pi]$. Сравнить полученные результаты с решением, полученным с помощью встроенных функций *MathCad*.

Образец выполнения задания

$$f(x, y) := \sin(x) + \frac{1}{y}$$

правая часть дифференциального уравнения

$$y_0 := 1 \quad x_0 := 0$$

задание начальных условий

$$N := 10$$

число точек разбиения отрезка интегрирования

$$b := 8 \cdot \pi \quad a := 0$$

границы отрезка интегрирования

$$h := \frac{(b-a)}{N}$$

вычисление шага интегрирования

$$h = 2.513$$

значение шага интегрирования

расчетные формулы метода Рунге-Кутты, заданные в виде функций пользователя

$$k1(x, y) := h \cdot f(x, y)$$

$$k2(x, y) := h \cdot f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k1(x, y)}{2}\right)$$

$$k3(x, y) := h \cdot f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k2(x, y)}{2}\right)$$

$$k4(x, y) := h \cdot f(x + h, y + k3(x, y))$$

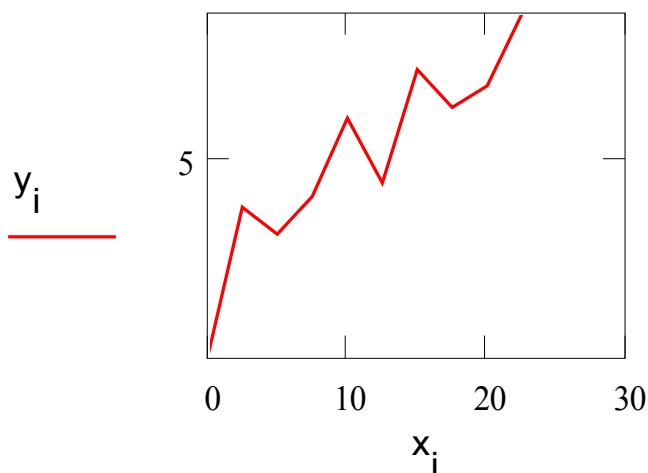
$$k(x, y) := k1(x, y) + 2 \cdot k2(x, y) + 2 \cdot k3(x, y) + k4(x, y)$$

построение точечного решения

$$i := 0..(N - 1)$$

$$x_{i+1} := x_i + h, \quad y_{i+1} := y_i + \frac{k(x_i, y_i)}{6}.$$

графическое решение уравнения и таблица значений функции $y(x)$



$$y = \begin{bmatrix} 1 \\ 4.032 \\ 3.528 \\ 4.269 \\ 5.877 \\ 4.54 \\ 6.843 \\ 6.081 \\ 6.512 \\ 7.983 \\ 6.499 \end{bmatrix}$$

проверка полученного решения с помощью встроенной функции MathCad rkfixed().

$f(x, y) := \sin(x) + \frac{1}{y}$ *правая часть дифференциального уравнения*

$y_0 := 1$ $x_0 := 0$ *задание начальных условий*

$x1 := 8 \cdot \pi$ *конец отрезка интегрирования*

$N := 10$ *число точек разбиения отрезка интегрирования*

$ic_0 := y_0$

$D(x, Y) := f(x, Y_0)$

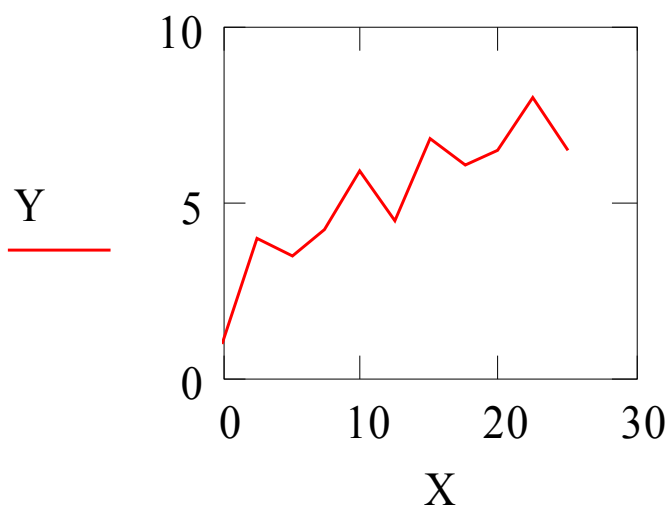
$S := rkfixed(ic, x_0, x1, N, D)$

Решение дифференциальных уравнений в пакете MathCad осуществляется методом Рунге-Кутты.

$X := S^{<0>}$

$Y := S^{<1>}$

графическое решение уравнения и таблица значений функции $y(x)$, полученные с помощью встроенных функций MathCad для решения дифференциальных уравнений



	0
0	1
1	4.032
2	3.528
3	4.269
4	5.877
5	4.54
6	6.843
7	6.081
8	6.512
9	7.983
10	6.499

Очевидно абсолютное совпадение полученных решений.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №6

Задание: Решить методом Рунге-Кутты систему дифференциальных уравнений с данными начальными условиями:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} y_0(t) &= 8 \cdot y_0(t) + 8 \cdot y_1(t) & y_0(0) &= 1 \\ \frac{d}{dt} y_1(t) &= 30 \cdot y_0(t) + y_1(1) - y_0(t) \cdot y_2(t) & y_1(0) &= 0 \\ \frac{d}{dt} y_2(t) &= y_0(t) \cdot y_1(t) - \frac{8}{3} \cdot y_2(t) & y_2(0) &= 1 \end{aligned}$$

Решение: В пакете MathCad существует несколько встроенных функций для решения систем дифференциальных уравнений. Для решения данной системы мы воспользовались функцией **Rkadapt** для поиска приближенного решения.

Задав фиксированным числом точек, можно аппроксимировать функцию более точно, если вычислять ее значения в точках, расположенных следующим образом: достаточно часто на тех интервалах, где функция меняется быстро, и не очень часто – где функция меняется более медленно. В отличие от функции **rkfixed**, которая ищет приближенное решение с постоянным шагом, функция **Rkadapt** проверяет, как быстро меняется приближенное решение, и соответственно адаптирует

размер шага. Этот адаптивный контроль величины шага дает возможность функции **Rkadapt** вычислять решение на более мелкой сетке в тех областях, где оно меняется быстро, и на более крупной – в тех областях, где оно меняется медленно. Это позволяет и повысить точность, и сократить время, требуемое для решения уравнения. Следует обратить внимание на то, что функция **Rkadapt** возвращает решение системы уравнений на равномерной сетке.

Функция **Rkadapt(y,x1,x2,npoints,D)** имеет те же самые аргументы, что и функция **rkfixed**, и возвращает идентичную по виду матрицу с приближенным решением (см. рис.14) [39].

Глава 4. ПРАКТИЧЕСКИЙ ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

С древних времен отмечалось, что многие природные процессы являются периодическими или почти периодическими явлениями, то есть такими, которые воспроизводятся в прежнем виде через определенный промежуток времени T , называемый периодом. Таковыми, например, являются смена времен года, дня и ночи, продолжительность светового дня и т.д. С точки зрения математики, различные величины, связанные с рассматриваемыми периодическими явлениями, по истечении периода T возвращаются к своим прежним значениям и представляют, следовательно, периодические функции от времени t :

$$f(t+T) = f(t).$$

Простейшей из периодических функций является синусоидальная величина: где ω есть частота, связанная с периодом T . Однако далеко не каждый природный процесс можно описать функцией указанного вида.

1. Постановка задачи гармонического анализа

Из простейших периодических функций могут быть составлены более сложные. При этом составляющие синусоидальные величины должны быть разных частот, так как сложение синусоидальных величин одной и той частоты не дает ничего нового, а приводит к синусоидальной величине той же частоты.

Естественно, встает обратный вопрос: можно ли данную периодическую функцию $f(t)$ периода T представить в виде суммы конечного или хотя бы бесконечного множества синусоидальных величин. Как известно из классического анализа, по отношению к достаточно широкому классу функций на этот вопрос можно дать утвердительный ответ, то есть для них имеет место разложение в тригонометрический ряд или ряд Фурье.

Геометрически это означает, что график периодической функции получается путем наложения ряда синусоид. Если же истолковать каждую синусоидальную величину механически, как представляющую гармоническое колебательное движение, то можно также сказать, что в этом случае сложное колебание (каковыми являются все колебания, встречающиеся в

природе), характеризуемое функцией $f(t)$, разлагается на отдельные гармонические колебания. В связи с этим отдельные синусоидальные величины, входящие в состав тригонометрического ряда, называют гармоническими составляющими функции $f(t)$, или просто ее гармониками (первой, второй и т.д.) Сам процесс разложения периодической функции на гармоники носит название *гармонического анализа* [27].

Итак, гармоническим анализом называют операцию разложения заданной периодической функции $f(x)$ в ряд Фурье. Если функция $f(x)$ задана аналитически, то задача ее гармонического анализа полностью решается с помощью известных из классического анализа формул Эйлера-Фурье для вычисления коэффициентов ряда Фурье. Однако в огромном числе практических задач подлежащая анализу функция $f(x)$ оказывается заданной в виде таблицы, полученной в результате измерений, или в виде кривой, вычерченной самопишущим прибором. Тогда точное вычисление коэффициентов Фурье по формулам Эйлера-Фурье невозможно. Таким образом, в нашем случае задача гармонического анализа заключается в построении практически удобных методов для приближенного определения коэффициентов ряда Фурье или для непосредственного вычерчивания гармоник различных порядков для функции, заданной таблично.

2. Разложение функций в ряд Фурье

Будем предполагать, что функция $f(x)$ – периодическая, с периодом 2π ($f(x+2\pi)=f(x)$). Как известно, это всегда обеспечивается соответствующим изменением масштаба по оси Ox .

Основная задача гармонического анализа состоит в представлении функции $f(x)$ в виде ряда:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)). \quad (1)$$

Полагая

$$c_n = \sqrt{(a_n)^2 + (b_n)^2}, \quad \sin \varphi_n = \frac{a_n}{c_n}, \quad \cos \varphi_n = \frac{b_n}{c_n}, \quad (2)$$

ряд (1) можно переписать в виде:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(nx + \varphi_n) \quad (3)$$

Здесь c_n – амплитуда гармоники, φ_n – фаза. Коэффициенты ряда (1) – ряда Фурье – определяют по формулам Эйлера-Фурье:

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x) dx, \\
a_n &= \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \cos(nx) dx, \\
b_n &= \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \sin(nx) dx.
\end{aligned} \tag{4}$$

Пусть промежуток от 0 до 2π разделен точками

$$x_1, x_2, \dots, x_{k-1} \quad (x_i = 2\pi i/k)$$

на k равных частей и пусть известны соответствующие ординаты –

$$y_0, y_1, y_2, \dots, y_{k-1}, y_k = y_0.$$

Тогда для вычисления интегралов в формулах (4) можно применить различные приближенные методы. Так, по формуле трапеций получим:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \cdot 2 \frac{\pi}{k} \cdot \left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{k-1} + \frac{y_k}{2} \right).$$

Отсюда в силу того, что $y_0 = y_k$,

$$\frac{k}{2} \cdot a_0 = y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_{k-1}. \tag{5}$$

Аналогично для определения коэффициентов a_n и b_n формула трапеций дает:

$$\frac{k}{2} \cdot a_k = y_0 + y_1 \cdot \cos\left(n \cdot \frac{2\pi}{k}\right) + y_2 \cdot \cos\left(n \cdot \frac{4\pi}{k}\right) + \dots + y_{k-1} \cdot \cos\left(n \cdot \frac{2(k-1)\pi}{k}\right), \tag{6}$$

$$\frac{k}{2} \cdot b_k = y_0 + y_1 \cdot \sin\left(n \cdot \frac{2\pi}{k}\right) + y_2 \cdot \sin\left(n \cdot \frac{4\pi}{k}\right) + \dots + y_{k-1} \cdot \sin\left(n \cdot \frac{2(k-1)\pi}{k}\right), \tag{7}$$

Окончательно получим:

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{k} \cdot \sum_{i=0}^{k-1} y_i, \\
a_k &= \frac{2}{\pi} \cdot \sum_{i=0}^{k-1} y_i \cdot \cos(kx_i), \\
b_k &= \frac{2}{\pi} \cdot \sum_{i=0}^{k-1} y_i \cdot \sin(kx_i).
\end{aligned}$$

Последние формулы носят название формул Бесселя. Они могут быть получены из формул для коэффициентов Фурье (4) функции $f(x)$, если вычислять входящие в них интегралы приближенно, используя формулу трапеций, полагая $f(0) = f(2\pi)$ [4].

Заметим, что значения a_0 , a_k , b_k , полученные по формулам Бесселя, будут близки к значениям коэффициентов Фурье функции только при относительно небольших k . В остальных случаях расхождение будет больше.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №7

Задание: Разложить заданную функцию в ряд Фурье.

Образец выполнения задания

Зададим функцию таблично

$N := 100$

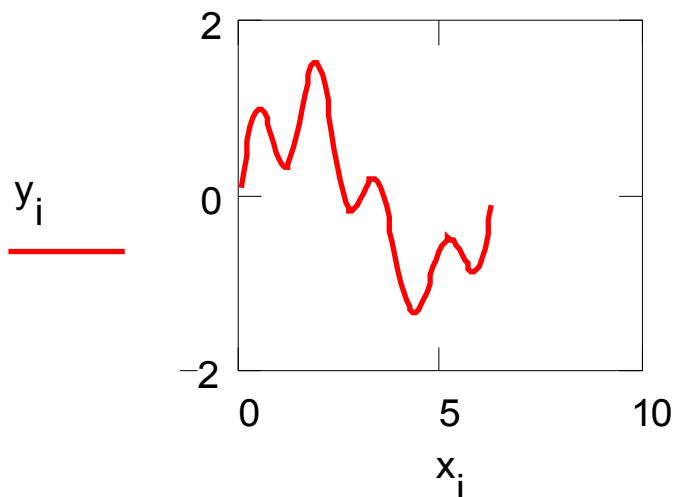
$a_1 := 1$ $a_2 := .5$ $a_3 := -.1$ $dt := 2 \cdot \frac{\pi}{N}$

$i := 1..N$

$x_i := i \cdot dt$ значения аргумента

$y_i := a_1 \cdot \sin(x_i) + a_2 \cdot \sin(4 \cdot x_i) + a_3 \cdot \cos(5 \cdot x_i)$ значения функции, являющейся суммой трех гармонических колебаний.

Графическое представление заданной функции подтверждает наличие периодических составляющих:



Воспользуемся формулами Бесселя для вычисления коэффициентов a_0 , a_k , b_k :

$$a_0 := \frac{\left(\sum_{l=1}^N y_l \right)}{N}$$

$n := 15$ $k := 1..n$ *Значение 15 выбрано в Связи с возможностью РС*

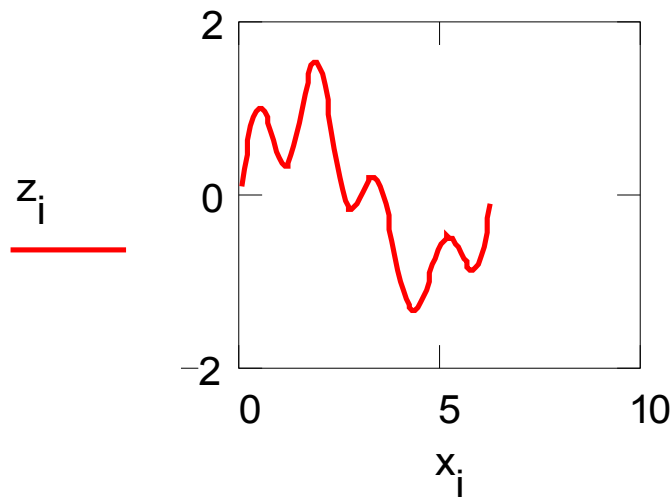
$$a_k := 2 \cdot \frac{\left(\sum_{l=1}^N y_l \cdot \cos(k \cdot x_l) \right)}{N} \quad b_k := 2 \cdot \frac{\left(\sum_{l=1}^N y_l \cdot \sin(k \cdot x_l) \right)}{N}$$

Учитывая, что при небольших k коэффициенты a_0, a_k, b_k будут близки к коэффициентам Фурье функции $f(x)$, получим:

$$i := 1..N$$

$$z_i := a_0 + \left[\sum_{k=1}^n (a_k \cdot \cos(k \cdot x_i) + b_k \cdot \sin(k \cdot x_i)) \right]$$

Графическое представление полученной функции (на рис. 15 представлены различные виды приближающей функции в зависимости от значения n):



Таким образом, графики иллюстрируют близость заданной функции и приближающего ее тригонометрического ряда.

Глава 5. СЕТЕВОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ И УПРАВЛЕНИЕ

Выполнение комплексных научных исследований, а также проектирование и строительство промышленных, сельскохозяйственных и транспортных объектов требуют календарной увязки большого числа взаимосвязанных работ, выполняемых различными организациями. Составление и анализ соответствующих календарных планов представляют собой весьма сложную задачу, при решении которой применяются так называемые методы сетевого планирования. По существу, этот метод дает возможность определить, во-первых, какие работы или операции из числа многих, составляющих проект, являются «критическими» по своему влиянию на общую календарную продолжительность проекта, и, во-вторых, каким образом построить наилучший календарный план проведения всех работ по данному проекту с тем, чтобы выдержать заданные сроки при минимальных затратах.

Первый вариант этого метода был разработан в 1957 году американским ученым Дж.Е. Келли и М.Р. Уокером и был назван СРМ (от начальных букв выражения «Critical Path Method», означающего «Метод критического пути»). Примерно в то же время независимо от СРМ появилась система PERT («Program Evaluation and Review Technique», что означает «Техника обзора и оценки программ»). В результате дальнейшего развития эти системы превратились в совокупную методику построения графиков – сетевое планирование и управление.

Идея сетевого метода очень проста. Она основана на графическом изображении комплекса работ с любой степенью их детализации и на выполнении элементарных арифметических операций по расчету параметров и анализу сетевых графиков.

1. Элементы и правила построения сетевых графиков

Система сетевого планирования основана на безмасштабном графическом изображении комплекса операций, показывающем технологическую последовательность и логическую взаимозависимость между всеми работами, направленными на достижение определенной цели.

Сетевой график (стрелочная диаграмма, сетевая модель, или просто сеть) состоит из стрелок и кружков, обозначающих два основных элемента любой сети – работы и события. Работа – это реальный процесс или действие, требующее затрат труда, материалов или времени. Продолжительность выполнения работ измеряется в единицах времени: часах, днях, неделях, месяцах и т.д. Работы могут иметь также и количественные показатели, которые характеризуют трудоемкость, стоимость, материальные ресурсы и т.д. Работы обозначаются стрелками, которые объединяются между собой с помощью кружков (событий). Временные и количественные оценки проставляются обычно над стрелками. Событием называется результат, получаемый после выполнения работ, стрелки которых сходятся к данному кружку. Событие имеет двойное значение. Для всех предшествующих работ оно является законченным свершением, а для последующих работ – начальным пунктом их выполнения. Всем событиям присваивается определенный цифровой шифр, который проставляется обычно внутри кружка. В общем смысле начальное (предшествующее) событие обозначается буквой i , а конечное (последующее) – буквой j , работа в этом случае обозначается как i, j .

Во всяком сетевом графике бывает два особых события, которые не имеют двойного значения – исходное и завершающее. Исходное событие – это момент начала выполнения комплекса работ. Оно не является результатом предыдущих работ, поэтому в него не входит ни одной стрелки. Исходные события принято обозначать буквой J . К особенностям завершающего события относится то, что оно свидетельствует об окончании всех работ и поэтому не имеет ни одной последующей работы. Из этого события не выходит ни одной стрелки. Обозначается оно буквой C .

Пример 1. Необходимо собрать узел из двух деталей A и B . Обе детали должны быть обработаны на токарном станке, деталь B должна пройти, кроме того, шлифовку. Перечень событий, а также данные о продолжительности работ (в минутах) приведены в табл. 1, 2.

Таблица 1

Шифр события	Описание события	Непосредственно предшествующие события
1	Начало	–
2	Получить материал для детали А	1
3	Получить материал для детали В	1
4	Обработать А на токарном станке	2, 3
5	Обработать В на токарном станке	2, 3
6	Шлифовать деталь В	5
7	Собрать узел из деталей А и В	4, 6

График этого проекта показан на рис. 1.

Таблица 2

Шифр работы	Продолжительность, мин
1,2	10
1,3	20
2,4	30
2,5	0
3,4	0
3,5	20
4,7	0
5,6	40
6,7	0
7,8	20

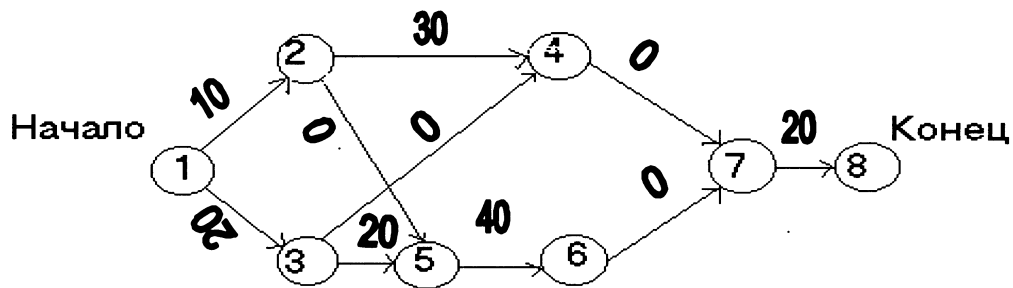


Рис. 1

Для получения безошибочной структуры сетевых графиков при их построении необходимо соблюдать следующие основные правила:

- в сетевом графике не должно быть тупиков, т.е. событий, из которых не выходит ни одной работы (за исключением завершающего события);
- сеть не должна иметь «хвостовых» событий (кроме исходного), которым не предшествует хотя бы одна работа;
- в сети не должно быть замкнутых контуров (циклов);
- в сетевой модели не допускаются работы, имеющие одинаковые шифры;
- любые два события должны быть непосредственно связаны не более чем одной работой-стрелкой;
- в сети рекомендуется иметь одно исходное и одно завершающее события.

При построении сети исходное событие располагается с левой стороны, а завершающее – с правой. Нумерация событий обычно начинается с

исходного и заканчивается на завершающем событии. Для любой работы предшествующее ей событие расположено левее и имеет меньший номер по сравнению с завершающим эту работу событием.

2. Понятие пути сетевого графика

Одно из важнейших понятий сетевого графика – понятие *пути*. Путь – любая последовательность работ, в которой конечное событие каждой работы совпадает с начальным событием следующей за ней работы. Среди различных путей сетевого графика наибольший интерес представляет *полный путь L* – любой путь, начало которого совпадает с исходным событием сети, а конец – с завершающим. Наиболее продолжительный полный путь в сетевом графике называется *критическим*. Критическими называются также работы и события, расположенные на этом пути. По существу, критический путь – «узкое» место проекта. Уменьшить общую продолжительность осуществления проекта можно, только изыскав способы сокращения работ, лежащих на критическом пути. Таким образом, нет никакой необходимости в часто практикуемом стремлении «поднажать» на всех работах ради сокращения общей длительности выполнения проекта. В больших проектах критическими бывают примерно 10% работ.

Для рассмотренного в примере 1 сетевого графика полными путями будут: путь $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 7 \rightarrow 8$ (продолжительностью $10+30+0+20=60$ минут), путь $1 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow 8$ (продолжительностью $10+0+40+0+20=70$ минут), путь $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 7 \rightarrow 8$ (продолжительностью $20+0+0+20=40$ минут), путь $1 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow 8$ (продолжительностью $20+20+40+0+20=100$ минут). Последний путь имеет наибольшую продолжительность и является критическим. Продолжительность критического пути составляет 100 минут. Быстрее работу выполнить нельзя, так как для достижения завершающего события критический путь надо пройти обязательно.

Время, необходимое для выполнения не критических работ, не имеет значения с точки зрения продолжительности осуществления проекта в целом. Иначе говоря, все ненапряженные пути имеют *резервы времени*. Эти резервы определяются вычитанием из критического пути продолжительности данного не критического пути.

3. Временные параметры сетевых графиков

В таблице 3 приведены основные временные параметры сетевых графиков.

Важнейшим показателем сетевого графика являются резервы времени [20]. Резервы времени каждого пути показывают, на сколько может быть

увеличена продолжительность данного пути без ущерба для наступления завершающего события. Поскольку каждый некритический путь сетевого графика имеет свой полный резерв времени, то и каждое событие этого пути имеет свой резерв времени.

Таблица 3

Элемент сети	Наименование параметра	Условное обозначение параметра
Событие i	Ранний срок свершения события	$t_p(i)$
	Поздний срок свершения события	$t(i)$
	Резерв времени события	$R(i)$
Работа (i, j)	Продолжительность работы	$t(i, j)$
	Ранний срок начала работы	$t_{pn}(i, j)$
	Ранний срок окончания работы	$t_{po}(i, j)$
	Поздний срок начала работы	$t_{пн}(i, j)$
	Поздний срок окончания работы	$t_{по}(i, j)$
	Полный резерв времени работы	$R_p(i, j)$
	Резерв времени пути	$R(L)$
Путь L	Продолжительность пути	$t(L)$
	Продолжительность критического пути	$t_{кр}$
	Резерв времени пути	$R(L)$

Для определения резервов времени по событиям сети рассчитывают наиболее ранние (t^p) и наиболее поздние (t^n) сроки свершения событий. Любое событие не может наступить прежде, чем свершатся все предшествующие ему события и не будут выполнены все предшествующие работы. Поэтому *ранний* (или ожидаемый) срок $t_p(i)$ свершения i -го события определяется продолжительностью максимального пути, предшествующего этому событию:

$$t_p(i) = \max_{L_{ni}} t(L_{ni}), \quad (1)$$

где L_{ni} – любой путь, предшествующий i -му событию, то есть путь от исходного до i -го события сети.

Если событие j имеет несколько предшествующих путей, а следовательно, несколько предшествующих событий i , то ранний срок свершения события j удобно находить по формуле:

$$t_p(j) = \max_{i, j} [t_p(i) + t(i, j)]. \quad (2)$$

Задержка свершения события i по отношению к своему раннему сроку не отразится на сроке свершения завершающего события (а значит, и на сроке выполнения комплекса работ) до тех пор, пока сумма срока свершения этого события и продолжительности (длины) максимального из следу-

ющих за ним путей не превысит длины критического пути. Поэтому *поздний* (или предельный) срок $t_n(i)$ свершения i -го события равен:

$$t_n(i) = t_{kp} - \max_{L_{ci}} t(L_{ci}), \quad (3)$$

где L_{ci} – любой путь, следующий за i -м событием, т.е. путь от i -го до завершающего события сети.

Если событие i имеет несколько последующих путей, а следовательно, несколько последующих событий j , то поздний срок свершения события i удобно находить по формуле:

$$t_n(i) = \max_{i,j} [t_n(j) + t(i,j)]. \quad (4)$$

Резерв времени $R(i)$ i -го события определяется как разность между поздним и ранним сроками его свершения:

$$R(i) = t_n(i) - t_p(i). \quad (5)$$

Резерв времени события показывает, на какой допустимый период времени можно задержать наступление этого события, не вызывая при этом увеличения срока выполнения комплекса работ.

Критические события резервов времени не имеют, так как любая задержка в свершении события, лежащего на критическом пути, вызовет такую же задержку в свершении завершающего события. Таким образом, определив ранний срок наступления завершающего события сети, мы тем самым определяем длину критического пути.

В качестве примера определим временные параметры событий и критический путь для сетевого графика, изображенного на рис. 1. Найденные параметры сведем в таблицу 4.

При определении ранних сроков свершения событий $t_p(i)$ двигаемся по сетевому графику слева направо и используем формулы (1), (2).

Для $i=1$ (начального события) $t_p(1)=0$. Для $i=2$ $t_p(2) = t_p(1) + t(1,2) = 0 + 10 = 10$ (мин), так как для события 2 существует только один предшествующий путь $1 \rightarrow 2$. Для $i=3$ $t_p(3) = t_p(1) + t(1,3) = 0 + 20 = 20$, так как для события 3 существует один предшествующий путь $1 \rightarrow 3$. Для $i=4$ $t_p(4) = \max \{ t_p(2) + t(2,4); t_p(3) + t(3,4) \} = \{ 10 + 30; 20 + 0 \} = 40$, так как для события 4 существуют два предшествующих пути $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4$ и $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4$ и два предшествующих события – 2 и 3. Аналогично определяем сроки раннего начала для остальных событий сети:

$$t_p(5) = \max \{ t_p(2) + t(2,5); t_p(3) + t(3,5) \} = \max \{ 10 + 0; 20 + 20 \} = \max \{ 10; 40 \} = 40;$$

$$t_p(6) = t_p(5) + t(5,6) = 40 + 40 = 80;$$

$$t_p(7) = \max \{ t_p(4) + t(4,7); t_p(6) + t(6,7) \} = \max \{ 40 + 0; 80 + 0 \} = \max \{ 40; 80 \} = 80;$$

$$t_p(8) = t_p(7) + t(7,8) = 80 + 20 = 100.$$

Длина критического пути равна раннему сроку свершения завершающего события 8:

$$t_{кр} = t_p(8) = 100 \text{ (мин)}.$$

Таблица 4

Номер события	Сроки свершения события, мин		Резерв времени, мин $R(i)$
	ранний $t_p(i)$	поздний $t_n(i)$	
1	0	0	0
2	10	40	30
3	20	20	0
4	40	80	40
5	40	40	0
6	80	80	0
7	80	80	0
8	100	100	0

При определении поздних сроков свершения событий $t_n(i)$ движемся по сети в обратном направлении, то есть справа налево и используем формулы (3), (4).

Для $i=8$ (завершающего события) поздний срок свершения события должен равняться его раннему сроку (иначе изменится длина критического пути): $t_n(8) = t_p(8) = 100$ (мин).

Для $i=7$ $t_n(7) = t_n(8) - t(7,8) = 100 - 20 = 80$, так как для события 7 существует только один последующий путь $7 \rightarrow 8$.

Для $i=6$ $t_n(6) = t_n(7) - t(6,7) = 80 - 0 = 80$, так как для события 6 существует только один последующий путь $6 \rightarrow 7 \rightarrow 8$.

Для $i=5$ $t_n(5) = t_n(6) - t(5,6) = 80 - 40 = 40$, так как для события 5 существует только один последующий путь $5 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow 8$.

Для $i=4$ $t_n(4) = t_n(7) - t(4,7) = 80 - 0 = 80$, так как для события 4 существует только один последующий путь $4 \rightarrow 7 \rightarrow 8$.

Для $i=3$ $t_n(3) = \min\{t_n(4) - t(3,4); t_n(5) - t(3,5)\} = \min\{80 - 0; 40 - 20\} = \min\{80; 20\} = 20$, так как для события 3 существует два последующих пути $3 \rightarrow 4 \rightarrow 7 \rightarrow 8$ и $3 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow 8$.

Для $i=2$ $t_n(2) = \min\{t_n(4) - t(2,4); t_n(5) - t(2,5)\} = \min\{80 - 30; 40 - 0\} = \min\{50; 40\} = 40$, так как для события 2 существует два последующих пути $2 \rightarrow 4 \rightarrow 7 \rightarrow 8$ и $2 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow 8$.

Для $i=1$ $t_n(1) = \min\{t_n(2) - t(1,2); t_n(3) - t(1,3)\} = \min\{40 - 10; 20 - 20\} = \min\{30; 0\} = 0$.

По формуле (5) определяем резервы времени i -го события:

$$R(1)=0; R(2)=30; R(3)=0 \text{ и т.д.}$$

Резерв времени события 2 - $R(2)=30$ означает, что время свершения события 2 может быть задержано на 30 минут без увеличения общего срока выполнения проекта. Анализируя таблицу 4, видим, что не имеют резервов времени события 1,3,5,6,7,8. Эти события и образуют критический путь.

Теперь перейдем к параметрам работ.

Отдельная работа может начаться (и окончиться) в ранние, поздние и другие промежуточные сроки. При оптимизации графика возможно любое размещение работы в заданном интервале.

Очевидно, что ранний срок $t_{pn}(i,j)$ начала работы (i,j) совпадает с ранним сроком наступления начального (предшествующего) события i , то есть

$$t_{pn}(i,j) = t_p(i). \quad (6)$$

Тогда ранний срок $t_{po}(i,j)$ окончания работы (i,j) определяется по формуле

$$t_{po}(i,j) = t_p(i) + t(i,j). \quad (7)$$

Ни одна работа не может окончиться позже допустимого позднего срока своего конечного события j . Поэтому поздний срок $t_{no}(i,j)$ окончания работы (i,j) определяется соотношением:

$$t_{no}(i,j) = t_n(j), \quad (8)$$

а поздний срок $t_{nn}(i,j)$ начала этой работы – соотношением

$$t_{nn}(i,j) = t_n(j) - t(i,j). \quad (9)$$

Прежде чем рассматривать резервы времени работ, обратимся к резерву времени пути. Такие резервы имеют все не критические пути. Резерв времени пути определяется как разность между длиной критического и рассматриваемого пути:

$$R(L) = t_{kp} - t(L). \quad (10)$$

Он показывает, на сколько в сумме могут быть увеличены продолжительности всех работ, принадлежащих этому пути. Любая из работ пути L на его участке, не совпадающем с критическим путем (замкнутым между двумя событиями критического пути), обладает резервом времени.

Полный резерв времени $R_n(i,j)$ работы (i,j) показывает, на сколько можно увеличить время выполнения данной работы при условии, что срок выполнения комплекса работ не изменится. Полный резерв $R_n(i,j)$ определяется по формуле:

$$R_n(i,j) = t_n(j) - t_p(i) - t(i,j). \quad (11)$$

Полный резерв времени работы равен резерву максимального из путей, проходящего через данную работу. Этим резервом можно располагать при

выполнении данной работы, если ее начальное событие свершится в самый ранний срок, и можно допустить свершение ее конечного события в самый поздний срок. Важным свойством полного резерва времени работы является то, что он принадлежит не только этой работе, но и всем полным путям, проходящим через нее.

Работы, лежащие на критическом пути, так же, как и критические события, резервов времени не имеют.

Вычислим в качестве примера временные параметры работ для сетевого графика, изображенного на рис. 1. Результаты вычислений сведем в таблицу 5.

Таблица 5

Работа (i,j)	Продолжительность работы $t(i,j)$	Сроки начала и окончания работы				Резервы времени работы $R_{\text{п}}(i,j)$
		$t_{\text{рн}}(i,j)$	$t_{\text{по}}(i,j)$	$t_{\text{пн}}(i,j)$	$t_{\text{по}}(i,j)$	
(1,2)	10	0	10	30	40	30
(1,3)	20	0	20	0	20	0
(2,4)	30	10	40	50	80	40
(2,5)	0	10	10	40	40	30
(3,4)	0	20	20	80	80	60
(3,5)	20	20	40	20	40	0
(4,7)	0	40	40	80	80	40
(5,6)	40	40	80	40	80	0
(6,7)	0	80	80	80	80	0
(7,8)	20	80	100	80	100	0

Вычисление временных параметров работы (i,j) покажем на примере работы (2,4).

Ранний срок начала работы (по формуле (6)): $t_{\text{рн}}(2,4) = t_{\text{р}}(2) = 10$. Ранний срок окончания работы (по формуле (7)): $t_{\text{по}}(2,4) = t_{\text{р}}(2) + t(2,4) = 10 + 30 = 40$. Поздний срок начала работы (по формуле (9)): $t_{\text{пн}}(2,4) = t_{\text{п}}(4) - t(2,4) = 80 - 30 = 50$. Поздний срок окончания работы (по формуле (8)): $t_{\text{по}}(2,4) = t_{\text{п}}(4) = 80$.

Таким образом, работа (2,4) должна начаться в интервале [10, 50] и закончиться в интервале [40, 80] от начала выполнения проекта.

Полный резерв времени работы (2,4) (по формуле (11)): $R_{\text{п}}(2,4) = t_{\text{п}}(4) - t_{\text{р}}(2) - t(2,4) = 80 - 10 - 30 = 40$, то есть срок выполнения данной работы можно увеличить на 40 минут, при этом срок выполнения комплекса работ не изменится.

Покажем на примере работы (2,4), что полный резерв времени работы равен резерву максимального из путей, проходящих через эту работу.

Через работу (2,4) проходит один полный путь: $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 7 \rightarrow 8$ продолжительностью 60 минут. По формуле (10) его резерв $R(L) = t_{\text{кр}} - t(L) = 100 -$

60=40. Как видим, полный резерв времени работы (2,4) равен резерву времени максимального (и единственного) полного пути, проходящего через эту работу. Если увеличить продолжительность работы (2,4) на 40 минут, то полностью будет исчерпан резерв времени этого пути, то есть этот путь станет также критическим.

Следует отметить, что кроме полного резерва времени работы выделяют еще три разновидности резервов. Частный резерв времени первого вида R_1 – часть полного резерва времени, на которое можно увеличить продолжительность работы, не изменив при этом позднего срока ее начального события. R_1 находится по формуле:

$$R(i,j) = R_n(i,j) - R(i). \quad (12)$$

Частный резерв времени второго вида, или свободный резерв времени R_c работы (i,j) представляет собой часть полного резерва времени, на которое можно увеличить продолжительность работы, не изменив при этом раннего срока ее конечного события. R_c находится по формуле:

$$R_c(i,j) = R_n(i,j) - R(j). \quad (13)$$

Независимый резерв времени R_n работы (i,j) – часть полного резерва, получаемая для случая, когда все предшествующие работы заканчиваются в поздние сроки, а все последующие начинаются в ранние сроки. R_n находится по формуле:

$$R_n(i,j) = R_n(i,j) - R(i) - R(j). \quad (14)$$

Более подробно узнать о применении вышеперечисленных данных можно в [8], [20].

4. Некоторые замечания об оптимизации плана

Оптимизация сетевого графика представляет собой процесс улучшения организации выполнения комплекса работ с учетом срока его выполнения. Она проводится с целью сокращения длины критического пути, рационального использования ресурсов.

В первую очередь принимаются меры по сокращению продолжительности работ, находящихся на критическом пути. Это достигается: перераспределением всех видов ресурсов – как временных (использование резервов времени некритических путей), так и трудовых, материальных, энергетических; сокращением трудоемкости критических работ за счет передачи части работ на другие пути, имеющие резервы времени; параллельным выполнением работ критического пути; изменением состава работ и структуры сети.

В процессе сокращения продолжительности работ критический путь может измениться и в дальнейшем процесс оптимизации будет направлен на сокращение продолжительности работ нового критического пути, и так будет продолжаться до получения удовлетворительного результата. В идеале длина любого из полных путей может стать равной длине критического пути. Тогда все работы будут вестись с равным напряжением, а срок выполнения проекта существенно сократится. Дополнительно о методах оптимизации сетевого графика можно узнать в [8], [20].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Заключение в конце учебного пособия, вообще говоря, и не обязательно. Однако внимательный и увлеченный работой читатель вполне имеет право спросить: «Ну и что?!» Действительно, что же получил студент-географ от знакомства с основными математическими приемами и подходами, используемыми при обработке экспериментальных данных? Авторы надеются, что это прежде всего осознание обыденности процедуры использования математики в качестве рабочего инструмента при исследовании природных явлений. Вторая грань приобретения будущего специалиста – это уверенность в безусловной реализуемости при помощи компьютера всех описанных в пособии процедур. Наконец, многочисленные ошибки и описки, допускаемые всеми исследователями в процессе подготовки действительно работающего проекта или программы, заставили приобрести уважение к процедуре проверки получаемых компьютером результатов. Все это в совокупности, освоенное и ставшее практическими навыками, заметно повышает класс специалиста.

И последнее. И математика, и компьютер отнюдь не являются универсальной волшебной палочкой в исследовании природных процессов, по мановению которой удастся решить любые научные задачи и проблемы. Подчеркнем, что только творческое использование всех возможных методов исследований и подходов может помочь заметно продвинуться в решении реальных задач. Поэтому – пробуйте, и у вас получится!

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Абрамов А.М., Виленкин Н.Я., Дорофеев Г.В. и др. Избранные вопросы математики. М.: Просвещение, 1980. 191 с.
2. Акоф Р., Сасиени М. Основы исследования операций. М.: Мир, 1971.
3. Бендат Дж., Пирсол А. Измерение и анализ случайных процессов. М.: Мир, 1974. 367 с.
4. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. М.: Гос. изд-во физико-математической литературы, 1959. 464 с.
5. Берлинер Э.М., Глазырин Б.Э., Глазырина И.Б. Microsoft Windows-95. Русская версия. М.: АБФ, 1996. 427 с.
6. Вагнер Г. Основы исследования операций: В 3 т. М.: Мир, 1972.
7. Воробьева Г.Н., Данилова А.Н. Практикум по вычислительной математике. М.: Высшая школа, 1990. 208 с.
8. Воронин В.Г. Математические методы планирования и управления на предприятиях пищевой промышленности. М.: Пищевая промышленность, 1971. 320 с.
9. Вычислительная математика: Методические указания, теоретический курс и контрольные задания / Под ред. проф. А.И. Бояринова. М.: Высшая школа, 1984. 112 с.
10. Гутер Р.С., Овчинский Б.В. Элементы численного анализа и математической обработки результатов опыта. М.: Наука, 1970. 432 с.
11. Данилина Н.И., Дубровская Н.С., Кваша О.П., Смирнов Г.Л. Вычислительная математика. М.: Высшая школа, 1985. 472 с.
12. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в примерах и задачах: В 2 ч. М., 1980.
13. Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З. Численные методы анализа. М.: Гос. изд-во физико-математической литературы, 1962. 368 с.
14. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. М.: Наука, 1970. 664 с.
15. Джонс Дж. К. Методы проектирования. М.: Мир, 1986. 326 с.
16. Дэвис Дж. Статистика и анализ геологических данных.: М.: Мир, 1977.
17. Заварыкин В.М., Житомирский В.Г., Лапчик М.П. Численные методы. М.: Просвещение, 1990. 176 с.
18. Замков О.О., Толстопятенко А.В., Черемных Ю.Н. Математические методы в экономике. М.: ДИС, 1997. 368 с.
19. Калиткин Н.Н. Численные методы. М.: Наука, 1978. 512 с.

20. Карасев А.И., Кремер Н.Ш., Савельева Т.И. М.: Экономика, 1987. 241 с.
21. Коплан-Дикс И.С. Основы статистической обработки и картирования океанографических данных. Л.: Гидрометеоздат, 1968. 129 с.
22. Копченова Н.В., Марон И.А. Вычислительная математика в примерах и задачах. М.: Наука, 1972. 367 с.
23. Матвеев Н.М. Дифференциальные уравнения. Минск.: Вышэйшая школа, 1968. 348 с.
24. Математические методы в географии: Учебник. Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1976. 352 с.
25. Математическое моделирование. М.: Мир, 1979. 277 с.
26. Матэр П. Компьютеры в географии. М.: Прогресс, 1981.
27. Норкин С.Б., Берри Р.Я., Жабин И.А. и др. Элементы вычислительной математики. М.: Высшая школа, 1963. 212 с.
28. Ортега Дж., Пул У. Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1986. 288 с.
29. Самнер Г. Математика для географов. М.: Прогресс, 1981. 296 с.
30. Смит Дж. Математические идеи в биологии. М.: Мир, 1970.
31. Трофимов А.М. Математические методы в географии. Казань, 1977.
32. Тюрин Ю.Н., Макаров А.А. Анализ данных на компьютере. М.: Финансы и статистика, 1995. 384 с.
33. Фигурнов В.Э. IBM PC для пользователя. М., 1997.
34. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. Т. 1, 2. М., 1964. 464 с.
35. Франкен Г., Молявко С. MS-DOS 6.2... для пользователя. Киев.: ВНУ, 1994. 446 с.
36. Фурунжиев Р.И., Бабушкин Ф.М., Варавко В.В. Применение математических методов и ЭВМ. Минск: Вышэйшая школа, 1988. 191 с.
37. Харвей Д. Научное объяснение в географии. М.: Прогресс, 1979.
38. Янпольский А.Р. Лабораторный вычислительный практикум. М.: ВИА, 1968. 180 с.
39. MATHCAD 6.0 PLUS. Финансовые, инженерные и научные расчеты в среде Windows 95. М.: Информационно-издательский дом «Филин», 1996. 712 с.

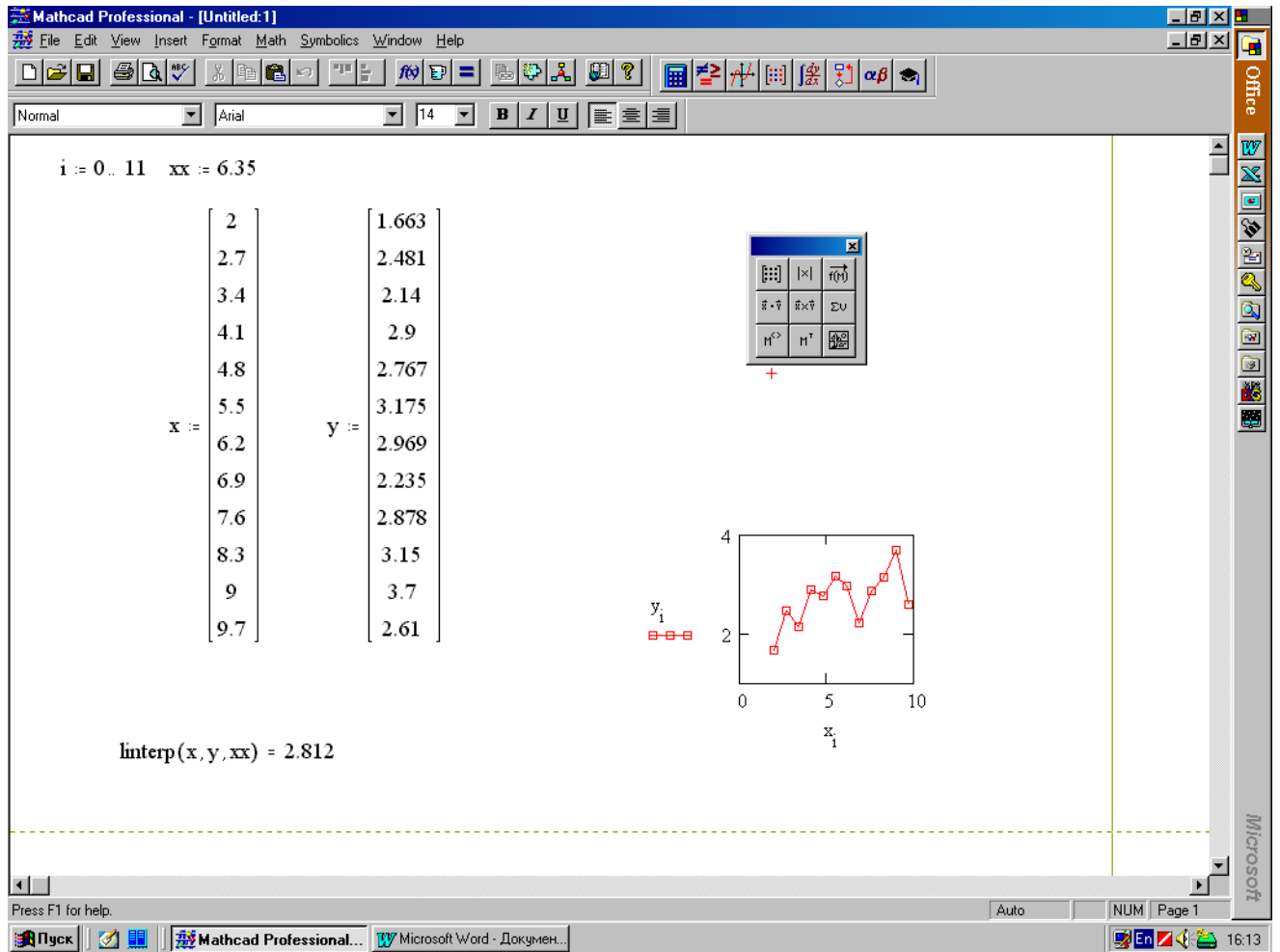


Рис.4. Решение задачи линейной интерполяции

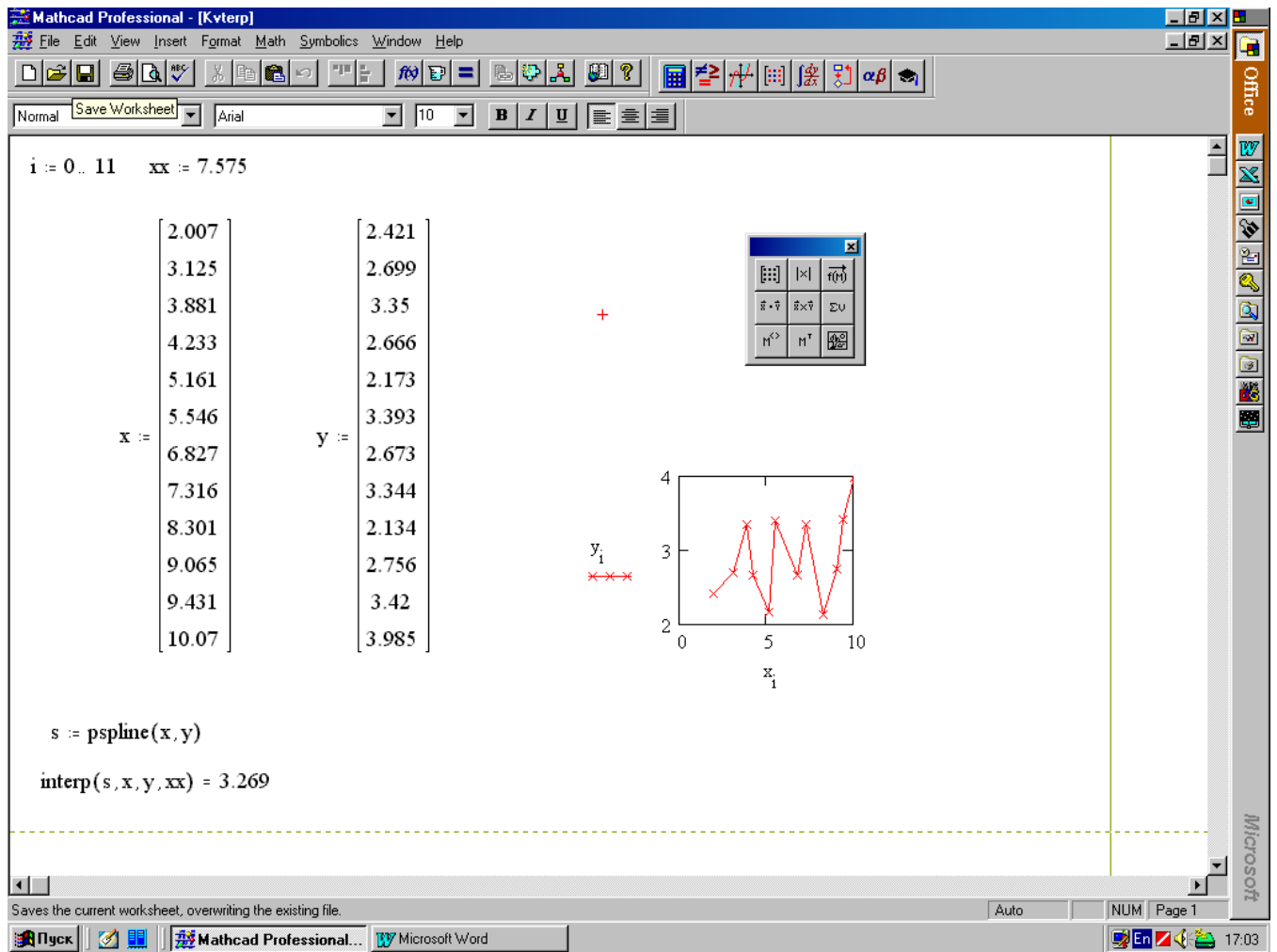


Рис.5. Решение задачи квадратичной интерполяции

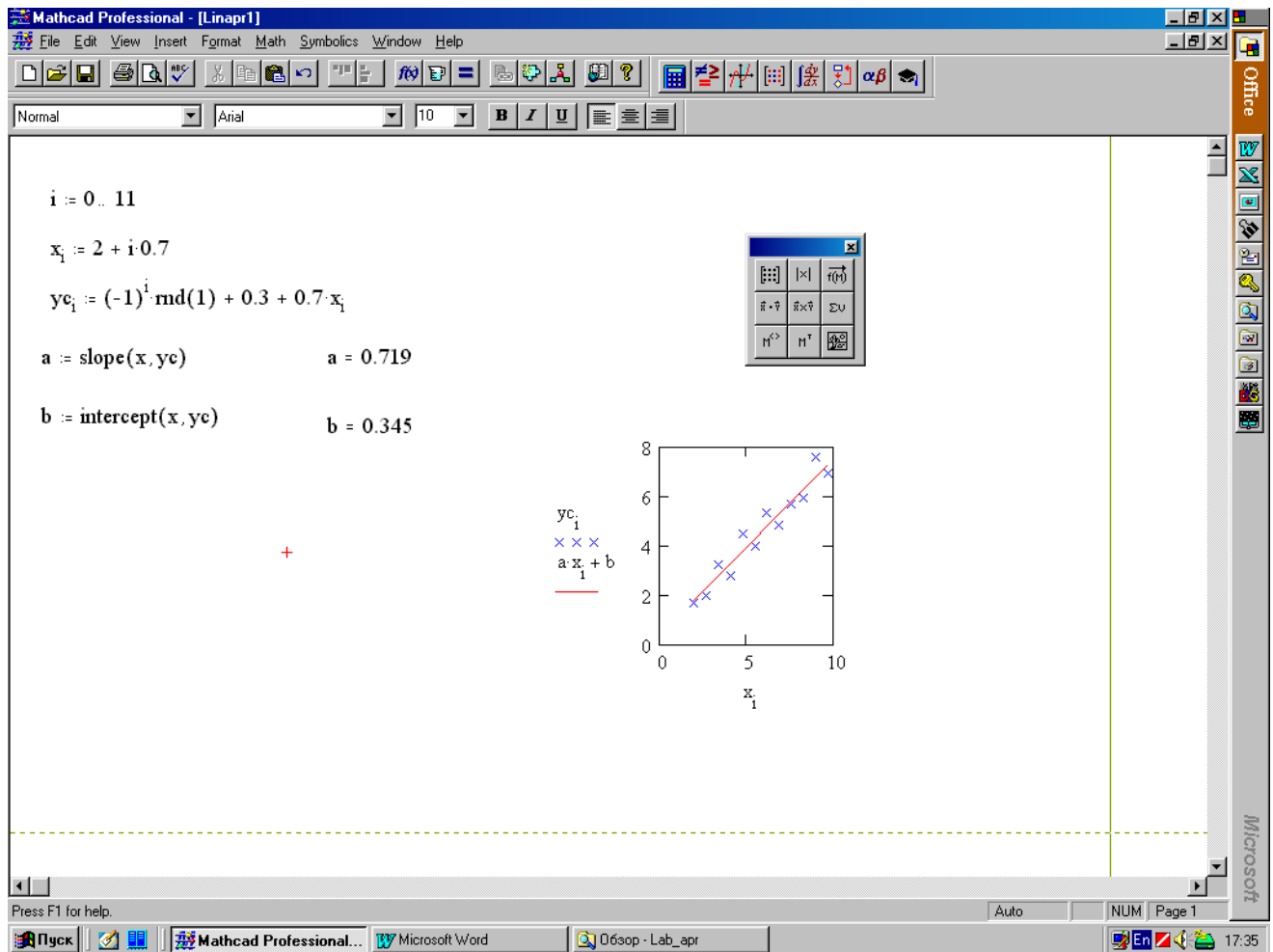


Рис.7. Решение задачи линейной аппроксимации

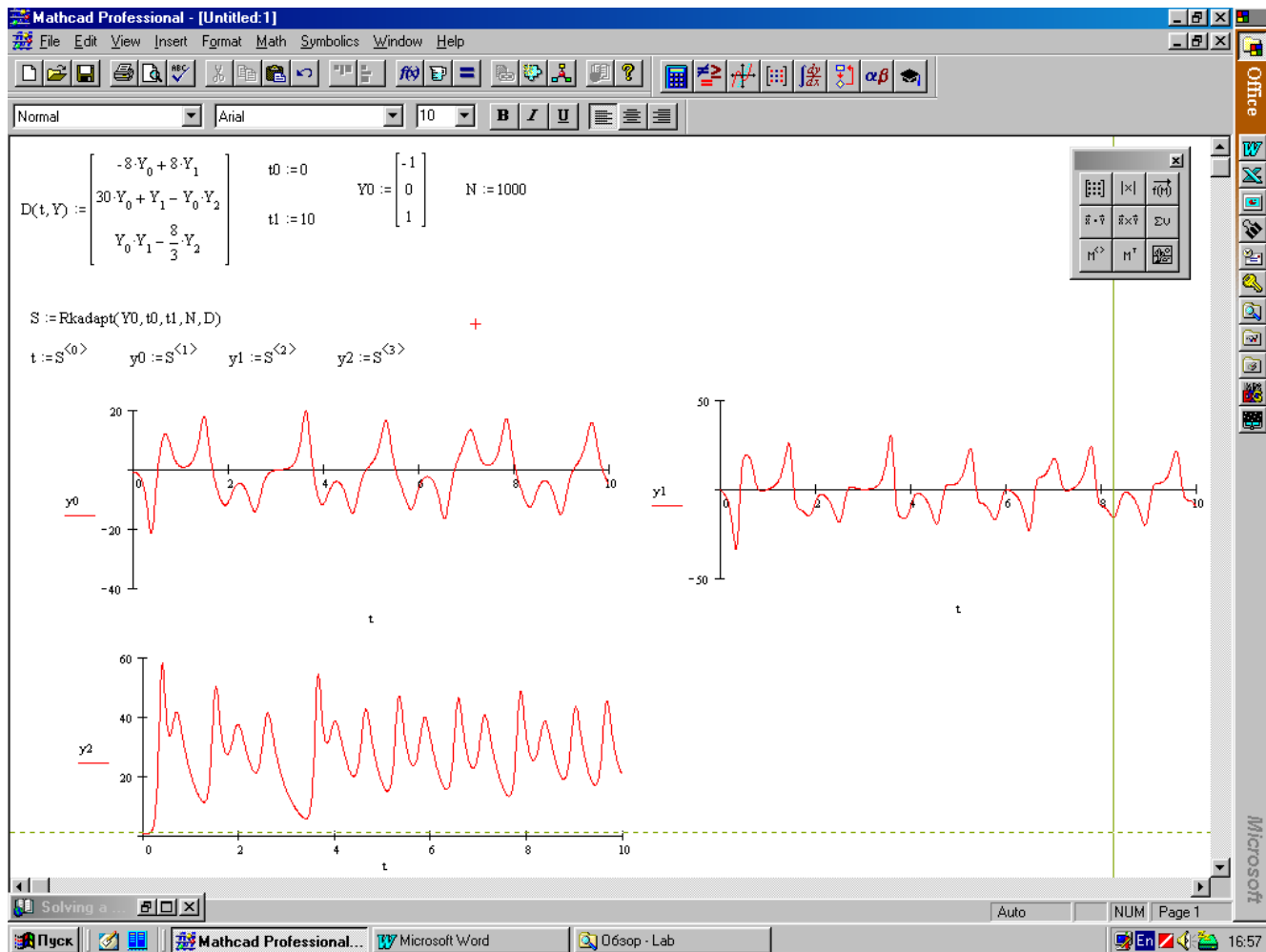


Рис.14. Решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с помощью встроенных функций MathCad

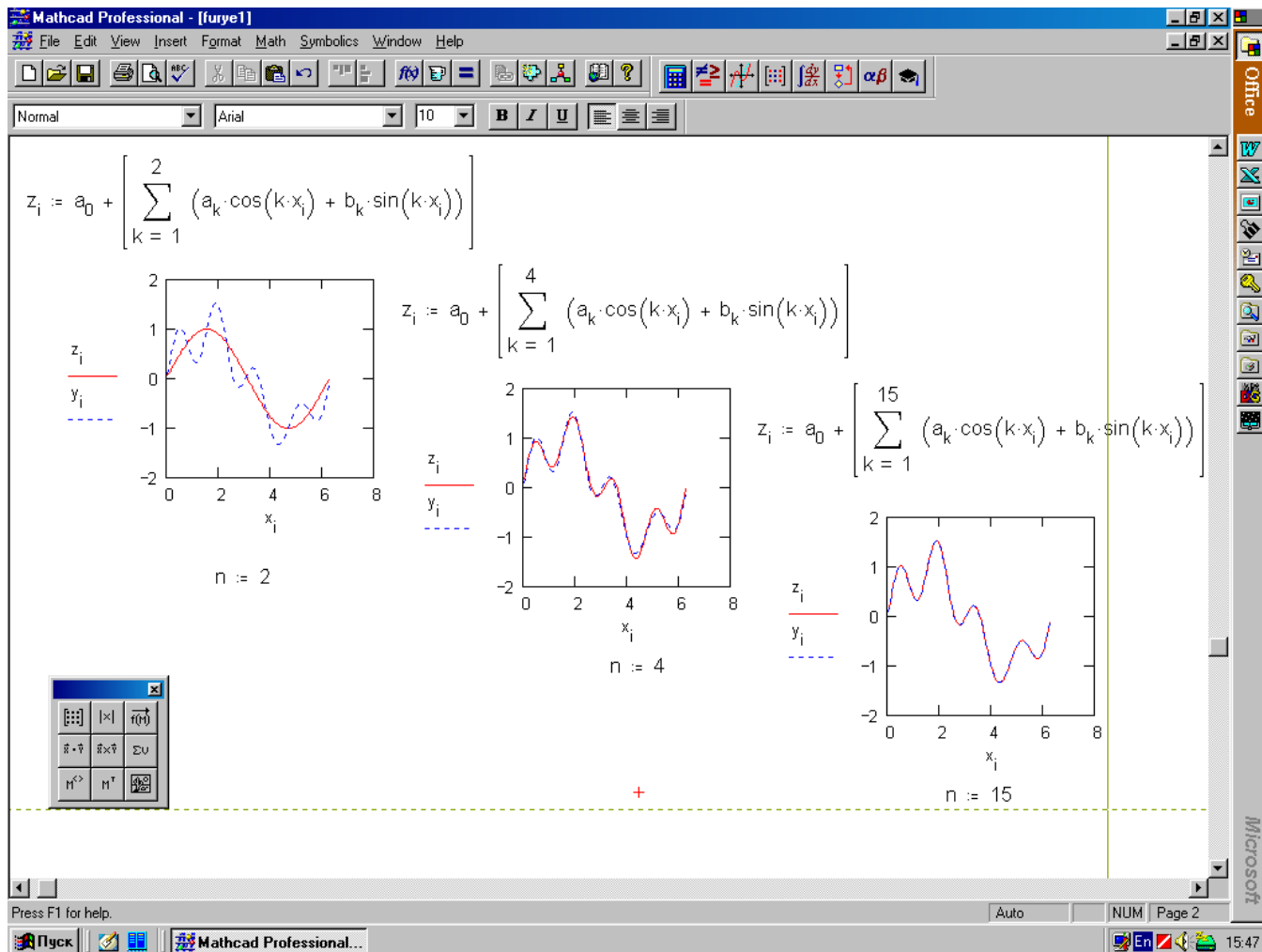


Рис.15 Вид графика приближающей функции в зависимости от значения n